Lógica e Teoria de Conjuntos | 21079 - Resolução

1. Considere a seguinte formulação do Teorema da Categoria de Baire:

"Seja F um espaço localmente compacto de Hausdorff não vazio. Então F é um espaço de Baire."

Considere as proposições seguintes:

p: "F é um espaço localmente compacto de Hausdorff"

q: "F é vazio"

r: "F é um espaço de Baire"

(a) Escreva o Teorema da Categoria de Baire na linguagem do cálculo proposicional.

Resolução: $p \wedge (\neg q) \Rightarrow r$

(b) Escreva a proposição

$$(r \wedge (\neg q)) \Rightarrow (p \vee (\neg r))$$

em linguagem comum.

Resolução: Se F é um espaço de Baire não vazio então, F é um espaço localmente compacto de Hausdorff ou não é um espaço de Baire.

(c) Escreva, na linguagem do cálculo proposicional, na forma mais simplificada que conseguir, a negação do consequente da proposição da alínea anterior.

Resolução: O consequente da implicação da alínea anterior é $p \vee \neg r$, pelo que a negação pedida é $\neg(p \vee (\neg r))$, o que é equivalente a $\neg p \wedge \neg\neg r$, o que por sua vez é equivalente a $\neg p \wedge r$.

2. Indique, justificando, se $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$ é uma consequência lógica de $(p \vee q \vee r) \wedge (p \Rightarrow \neg r)$.

Resolução: Para que $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$ fosse uma consequência lógica de $(p \vee q \vee r) \wedge (p \Rightarrow \neg r)$ era necessário que qualquer atribuição de valores lógicos às constantes proposicionais que tornasse a proposição $(p \vee q \vee r) \wedge (p \Rightarrow \neg r)$ verdadeira, também tornaria a proposição $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$ verdadeira. Ora tal não é o caso pois tomando p verdadeira e q e r falsas temos que $(p \vee q \vee r) \wedge (p \Rightarrow \neg r)$ seria verdadeira (conjunção de duas proposições verdadeiras) mas $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$ seria falsa (disjunção de duas proposições falsas visto implicações com antecedente verdadeiro e consequente falso serem falsas). Assim sendo, concluimos que a resposta é não, a proposição $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$ não é uma consequência lógica da proposição $(p \vee q \vee r) \wedge (p \Rightarrow \neg r)$.

3. Classifique a fórmula

$$((p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)) \Rightarrow (r \Rightarrow s)$$

em termos de tautologia, contingência ou contradição. Justifique a sua resposta sem recorrer a uma tabela de verdade.

Resolução: É uma contingência, pois há atribuições de valores lógicos às constantes proposicionais que tornam a fórmula verdadeira (por exemplo todas as constantes proposicionais verdadeiras) e há uma atribuição de valores lógicos às constantes proposicionais que tornam a fórmula falsa (p e r verdadeiras e s e q falsas).

4.(a) Considere o seguinte conjunto de fórmulas

$$\{p \vee q,\ \neg p,\ p \Rightarrow r\}.$$

Indique, justificando, se o conjunto é satisfazível.

Resolução: Sim, o conjunto é satisfazível. Através de uma tabelade verdade é possível ver que há atribuições de valores lógicos às constantes proposicionais que tornam as três fórmulas verdadeiras em simultâneo. Por exemplo p falsa e q e r verdadeira. [A outra possibilidade seria q verdadeira e p e r falsas].

(b) Demonstre, no sistema de dedução natural, que

$$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r.$$

Resolução:

$-$	1.	$p \Rightarrow q$	$Hip.$
$-$	2.	$q \Rightarrow r$	$Hip.$
$\{3\}$	3.	p	$Hip.[\Rightarrow I]$
$\{3\}$	4.	q	$1,3[\Rightarrow E]$
$\{3\}$	5.	r	$2,4[\Rightarrow E]$
$-$	6.	$p \Rightarrow r$	$3-5[\Rightarrow I]$

FIM