# Álgebra Linear II | 21003

**Proposta de resolução**

**1. (1 valor)** Seja $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$. Suponha que $0$ é um valor próprio de $A$, tal que ma$(0) = 4$ e mg$(0) = 2$.

Mostre que $A^3 = 0_{4\times 4}$.

**Resolução:** Pelo teorema de Jordan, existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$, tal que $J = P^{-1}AP$ é na forma canónica de Jordan.

Porque ma$(0) = 4 =$dim$(A)$, $0$ é o é o valor próprio único de $A$. Portanto, a diagonal de $A$ consiste em zeros. Pois mg$(0) = 2$, $J$ tem $2$ blocos de Jordan. Existem três possibilidades para $J$:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No caso $J_1$, temos $A^3 = (PJ_1P^{-1})^3 = PJ_1P^{-1}PJ_1P^{-1}PJ_1P^{-1} = PJ_1^3P^{-1}$

$$= P \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 P^{-1} = PJ_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No caso $J_2$, temos $A^3 = (PJ_2P^{-1})^3 = PJ_2^3P^{-1}$

$$= P \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 P^{-1} = PJ_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = 0.$$

No caso $J_3$, temos $A^3 = (PJ_3P^{-1})^3 = PJ_3^3P^{-1}$

$$= P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 P^{-1} = PJ_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = 0.$$

Portanto, em todos os casos, temos que $A^3 = 0_{4\times 4}$.

**2. (2 valores)** Considere a seguinte matriz $A \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{C})$.

$$A = \begin{bmatrix} 42 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 42 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 42 \end{bmatrix}$$

Determine o polinómio característico de $A$; os valores próprios de $A$, e suas multiplicidades algébricas e geométricas; $J$, a forma canónica de Jordan da matriz $A$; e uma matriz invertível $Q$ tal que $J = Q^{-1}AQ$.

**Resolução:**

Calculemos o polinómio característico da matriz $A$:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_5| = \begin{vmatrix} 42-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 42-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 42-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 42-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 42-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (42-\lambda) \begin{vmatrix} 42-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 42-\lambda & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 42-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 42-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (42-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 42-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 42-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 42-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (42-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 42-\lambda & 0 \\ 0 & 42-\lambda \end{vmatrix} = (42-\lambda)^5.$$

Logo, o valor próprio único da matriz é a solução da equação $p_A(\lambda) = 0$, isto é $\lambda = 42$ com multiplicidade algébrica ma$(42) = 5$. Vamos agora calcular a multiplicidade geométrica de $42$.

$$A - 42I_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo mg$(42) = 5-$rank$(A - 42I_5) = 5 - 3 = 2$.

Atendendo às multiplicidades algébrica e geométrica sabemos que a matriz de Jordan $J$ que procuramos é constituida por dois blocos. Temos duas possibilidades: um tem dimensão 1 e o outro dimensão 4; um tem dimensão 2 e o outro dimensão 3.

Temos

$$(A - 42I_5)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0_5,$$

$$(A - 42I_5)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_5.$$

Portanto, a dimensão do maior bloco de Jordan é igual a $3$ e obtemos

$$J = \begin{bmatrix} 42 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 42 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 42 \end{bmatrix}.$$

(alterar a ordem dos dois blocos de Jordan resulta em outra solução correta)

Para obter a matriz $Q$ precisamos de calucular os vectores próprios e vectores próprios generalizados associados ao valor próprio $42$.

Considere $E_{42}$. Seja $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$. Temos

$E_{42} = \{x \in \mathbb{C}^5 : (A - 42I_5)x = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{C}^5 : -1x_4 = 0, -2x_5 = 0, 3x_2 = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{C}^5 : x_2 = x_4 = x_5 = 0\}$

$= \{[x_1, 0, x_3, 0, 0]^T : x_1, x_3 \in \mathbb{C}\} = \langle [1, 0, 0, 0, 0]^T, [0, 0, 1, 0, 0]^T \rangle.$

Seja $N$ o espaço de vetores próprios generalizados de ordem $2$, $1$, e $0$. Temos $N = \{x \in \mathbb{C}^5 : (A - 42I_5)^2 x = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{C}^5 : -3x_2 = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{C}^5 : x_2 = 0\}$

$= \{[x_1, 0, x_3, x_4, x_5]^T : x_2 \in \mathbb{C}\}$
$= \langle [1,0,0,0,0]^T, [0,0,1,0,0]^T, [0,0,0,1,0]^T, [0,0,0,0,1]^T \rangle.$

Porque $(A-42I)^3 = 0$ e ma$(42) = 5$ =dim$(A)$, sabemos que todo vetor que não está em $N$ é um vetor próprio generalizado de ordem $3$. Para iniciar nossa primeira cadeia, escolhemos um vetor $v_3$ em $\mathbb{C}^5 \setminus N$. A escolha mais simples é $v_3 = [0,1,0,0,0]^T$.

Obtemos a cadeira

$v_2 = (A - 42I)v_3 = [0,0,0,3,0]^T,$

$v_1 = (A - 42I)v_2 = [-3,0,0,0,0]^T.$

Para iniciar nossa segunda cadeia, escolhemos um vetor $u_2$ em $N \setminus E_{42}$. Deve ser linear independente de $v_2$. A escolha mais simples é $u_2 = [0,0,0,0,1]^T$.

Obtemos

$u_1 = (A - 42I)u_2 = [0,0,-2,0,0]^T.$

Juntando, obtemos a matriz de semelhança $Q$:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Existem muitas outras soluções corretas para $Q$)

**3. (1 valor)** Considere a aplicação $\cdot|\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$z|w = \text{re}(z\bar{w}).$$

Aqui, para $z = x+yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, re é definida como re$(z)$ = re$(x+yi) = x$.

Quais dos axiomas A1, A2, A3, e A4 (Def. 2.10) são validos para a aplicação $\cdot|\cdot$?

**Resolução:** A1: Sejam $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i, w = x' + y'i \in \mathbb{C}$, $x_1, y_1, x_2, y_2, x', y' \in \mathbb{R}$. Então

$(z_1 + z_2)|w =$re$((z_1 + z_2)\bar{w})$ =re$(((x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i))(x' - y'i)$

=re$((x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i)(x' - y'i))$

=re$((x_1x' + x_2x' + y_1y' + y_2y' + (y_1x' + y_2x' - x_1y' - x_2y')i)$

$= x_1x' + x_2x' + y_1y' + y_2y'$

Além disso,

$z_1|w + z_2|w = \text{re}(z_1\bar{w}) + \text{re}(z_2\bar{w}) = \text{re}((x_1+y_1i)(x' - y'i)) + \text{re}((x_2+y_2i)(x' - y'i))$

$= \text{re}((x_1x' + y_1y' + (-x_1y' + x'y_1)i) + \text{re}((x_2x' + y_2y' + (-x_2y' + x'y_2)i)$

$= x_1x' + x_2x' + y_1y' + y_2y'$

Pois, axioma A1 é valida.

A2: Se $\alpha = i, z = w = 1$, temos

$(\alpha z)|w = (i \cdot 1)|1 = i|1 = \text{re}(i \cdot \bar{1}) = \text{re}(i \cdot 1) = \text{re}(i) = 0,$

mas $\alpha(w|z) = i(1|1) = i\ \text{re}(1 \cdot \bar{1}) = i\ \text{re}(1 \cdot 1) = i\ \text{re}(1) = i \cdot 1 = i.$

Logo, axioma A2 não é valida.

A3: Sejam $z = x + yi, w = x' + y'i \in \mathbb{C}, x, y, x', y' \in \mathbb{R}$. Então

$z|w = \text{re}(z\bar{w}) = \text{re}((x + yi)(x' - y'i)) = \text{re}(xx' + yy' + (xy' + yx')i) = xx' + yy' = xx' + yy' - 0i$

e

$w|z = \text{re}(w\bar{z}) = \text{re}((x' + y'i)(x - yi)) = \text{re}(xx' + yy' + (xy' + yx')i) = xx' + yy' = xx' + yy' + 0i$

Portanto, $z|w = \overline{w|z}$, e A3 é valida.

A4: Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$. Então

$z|z = \text{re}(z\bar{z}) = \text{re}((x+yi)(x-yi)) = \text{re}(x^2+y^2+(xy-yx)i) = x^2+y^2 \geq 0.$

Além disso, $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow z = 0.$

Poartanto, axioma A4 é valida.

FIM