I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

Questão 1

Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$A = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \colon xy = 0\}, \qquad B = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \colon x + y = 0\},$$
$$C = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \colon x + y + w = 0\}, \qquad D = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \colon z - w = 0\}.$$

Então:

- ☐ **a)** Os conjuntos A, B, C e D são subespaços de $\mathbb{R}^4$.
- ☒ **b)** Só os conjuntos B, C e D são subespaços de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ **c)** Só os conjuntos C e D são subespaços de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ **d)** O conjunto D não é subespaço de $\mathbb{R}^4$.

Questão 2

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz que satisfaz $A^2 + A - I_n = 0$, onde I_n designa a matriz identidade de ordem n. Então:

- ☒ **a)** $A^{-1} = A + I_n$.
- ☐ **b)** $A^{-1} = A^2$.
- ☐ **c)** $A^{-1} = A$.
- ☐ **d)** $A^{-1} = I_n$.

Questão 3

Sejam F e G subespaços de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que

$$F = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ e } G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Então:

- ☒ **a)** $\dim(F + G) = 3$.
- ☐ **b)** $\dim(F \cap G) = 0$.
- ☐ **c)** $\dim(F + G) = 4$.
- ☐ **d)** $\dim F = 1$.

Questão 4

Seja E um espaço vetorial e (u, v, w) uma sequência linearmente independente. Então:

☒ **a)** Os vetores $u, u+v$ e $v+w$ são linearmente independentes.

☐ **b)** Os vetores u e $u-v$ são linearmente dependentes.

☐ **c)** Os vetores u, v e w formam uma base de E.

☐ **d)** Existe $\alpha \neq 0$ tal que $u = \alpha v$.

Responda aos grupos seguintes no Caderno de Prova

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ definida por $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Então 1 é valor próprio de A se e sómente se $a = 0$ ou $b = 0$.

b) Se $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é tal que $C^2 = C$ então $C = I_n$.

III. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x \qquad\quad - 6z = -8 \\ \qquad\ \ y + 2z = \ \ 3 \\ 3x + 6y - 2z = -4 \end{cases}.$$

Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando claramente todas as operações que efetuar,* discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

IV. Considere as matrizes

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e a transformação linear $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(M_1) = M_2,\ T(M_2) = M_3 + M_4,\ T(M_3) = M_2 - M_1,\ T(M_4) = M_1.$$

a) Mostre que as matrizes M_1, M_2, M_3 e M_4 constituem uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Justifique que T está bem definida.

c) Seja $\mathcal{B}$ a base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ da alínea **a)**. Determine a matriz $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \mathcal{B})$, que representa T em relação à base $\mathcal{B}$ em ambos os espaços de partida e de chegada.

d) Calcule os valores próprios de $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ e os correspondentes subespaços próprios[1].

e) Determine a nulidade (dimensão do núcleo) e a característica (dimensão da imagem) de T.

f) Será T diagonalizável? Justifique.

V. Seja E um espaço vetorial real de dimensão $n > 1$, e $T: E \to E$ uma transformação linear.

a) Suponha que existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $T^2(v) = \mu T(v), \ \forall v \in E$
(ou seja $T(T(v)) = \mu T(v), \ \forall v \in E$).
Determine os possíveis valores próprios da transformação T.

b) Nas condições da alínea anterior mostre que se $\mu \neq 1$ então a transformação linear definida por

$$S(v) = v - T(v)$$

é invertível.

c) Prove que se a característica de T for 1, então existe μ nas condições da alínea **a)**.

d) Será que se existir $\mu \in \mathbb{R}$ nas condições da alínea **a)** então a característica de T é necessariamente igual a 1?

FIM

RESOLUÇÃO

Nas questões de escolha múltipla não era necessário a apresentação dos cálculos e justificações que se seguem, mas apenas a indicação da alínea correspondente à resposta correta. Em praticamente todas as alíneas há várias maneiras corretas de resolver a questão colocada e a que aqui se apresenta é apenas uma delas, e não necessariamente a mais curta.

I. 1. O conjunto A não é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ pois somando 2 elementos de A podemos não obter um elemento de A; por exemplo

$$(0, 1, 0, 0) + (1, 0, 0, 0) = (1, 1, , 0, 0) \notin A.$$

[1] Se não resolveu a alínea **c)** resolva esta alínea considerando a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Em relação a B, C e D facilmente se verifica que são não vazios. Vejamos que dados dois elementos de C a sua soma ainda está em C.

Dados $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ em C, ou seja tais que $x_1+x_2+x_4 = 0$ e $y_1 + y_2 + y_4 = 0$, tem-se

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4).$$

Podemos verificar que as componentes (z_1, z_2, z_3, z_4) de $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ satisfazem $z_1 + z_2 + z_4 = 0$, ou seja

$$z_1+z_2+z_4 = (x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_4+y_4) = (x_1+x_2+x_4)+(y_1+y_2+y_4) = 0+0 = 0,$$

e portanto $\mathbf{z} \in C$.

A demonstração para B e D é análoga.

Portanto a resposta correta é a alínea b).

2. Como $A^2 + A - I_n = 0$, tem-se $A = I_n - A^2$ e portanto se existir a inversa de A como por deinição $A^{-1}A = I_n$ tem-se $A^{-1}(I_n - A^2) = I_n$ o que é equivalente a $A^{-1} - A = I_n$, ou seja $A^{-1} = A + I_n$.

Assim, a resposta correta é a da alínea a).

3. Nesta questão podemos reparar que tanto em F como em G o primeiro elemento da segunda coluna de qualquer das matrizes é sempre igual a zero. Podemos também reparar que a primeira matriz de F é igual à soma das duas matrizes de G. Estas duas observações permitem eliminar c) e b). Também podemos eliminar a opção d) reparando que as duas matrizes que definem F são linearmente independentes.

Assim a resposta correta é a a).

4. Como não sabemos a dimensão de E podemos eliminar logo a opção c). Como u e v pertencem a uma sequência linearmente independente podemos também eliminar a opção d). Vejamos que b) é falsa, ou seja que u e $u-v$ são linearmente independentes, mostrando que os coeficientes de uma combinação linear nula são necessariamente nulos.

$\alpha u + \beta(u - v) = 0 \Rightarrow (\alpha + \beta)u + \beta v = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0$ e $\beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$, pois u e v são linearmente independentes. Assim a resposta correta é a a).

De modo semelhante mostra-se que u, $u + v$ e $v + w$ são linearmente independentes.

II. a) λ é valor próprio de A se e só se $\det(A - \lambda I_3) = 0$ e portanto para $\lambda = 1$ tem-se

$$1 \text{ é valor próprio de } A \iff \det(A - 1 \times I_3) = \det(A - I_3) = 0.$$

Tem-se

$$\det(A - I_3) = \det \begin{bmatrix} 1-1 & a & 0 \\ 1 & -1-1 & 1 \\ b & 0 & 1-1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ b & 0 & 0 \end{bmatrix} = -a \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} = ab.$$

Concluímos então que

1 é valor próprio de $A \iff \det(A - I_3) = 0 \iff ab = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$, e portanto a proposição era verdadeira.

b) No caso em que $n = 1$ a equação $C^2 = C$ equivale a $C^2 - C = C(C-1) = 0$ cujas soluções são $C = 0$ e $C = 1$.

Para $n > 1$ seja $C = 0_n$ a matriz $n \times n$ com todas as entradas nulas; então $C^2 = 0_n^2 = 0_n$.

Portanto a afirmação é falsa.

III. Antes de utilizarmos o *método de eliminação de Gauss* para estudar o sistema

$$\begin{cases} 2x \phantom{{}+6y} - 6z = -8 \\ \phantom{3x+{}} y + 2z = 3 \\ 3x + 6y - 2z = -4 \end{cases}.$$

vamos escrevê-lo em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

A matriz ampliada deste sistema é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 & -4 \end{array}\right],$$

e portanto com a notação habitual,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3-3\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3-6\ell_2]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{5}\ell_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_1-3\ell_3 \\ \ell_2-2\ell_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

donde concluímos que existe solução, que ela é única e que a solução do sistema é dada por $(x, y, z) = (2, -1, 2)$.

IV. a) Uma vez que $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial de dimensão 4, para mostrar que 4 matrizes formam uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ basta mostrar que são linearmente independentes. Vejamos duas formas diferentes de o provar.

considerando uma combinação linear nulas destas 4 matrizes

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{4} a_i M_i = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \iff & a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3 + a_4 M_4 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \\
\iff & a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\iff & \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & a_3 \\ a_1 + a_4 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\iff & a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0,
\end{aligned}$$

e portanto as 4 matrizes são linearmente independentes.

Outra forma de chegar à mesma conclusão consiste em identificar os elementos de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com os elementos de $\mathbb{R}^4$ através do isomorfismo usual que associa a uma matriz $M = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ o vetor $\mathbf{v} = (a, b, c, d)$. O facto de termos um isomorfismo permite-nos dizer que as matrizes M_1, M_2, M_3 e M_4 são linearmente independentes se e só se os vetores correspondentes $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ e $\mathbf{v_4}$ também o forem. Os vetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ e $\mathbf{v_4}$ são linearmente independentes se e só se a matriz que tem por colunas (ou linhas) estes vetores tiver característica 4, o que também é equivalente a ter determinante não nulo.

A matriz cujas colunas são os vetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ e $\mathbf{v_4}$ é a matriz

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que tem por determinante (aplicando o teorema de Laplace à segunda linha, e depois à terceira coluna)

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Como o determinante é diferente de zero concluímos que os 4 vetores são linearmente independentes, e portanto também as 4 matrizes correspondentes são linearmente independentes.

b) Como as 4 matrizes formam uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, para definir uma transformação linear em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é suficiente dar a imagem das matrizes da base através da transformação. Dada uma matriz arbitrária $M = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ podemos escrevê-la à custa das quatro matrizes da base de modo único como $M = a_1M_1 + a_2M_2 + a_3M_3 + a_4M_4$. Uma vez que T é uma transformação **linear** tem-se

$$\begin{aligned} T(M) &= T(a_1M_1 + a_2M_2 + a_3M_3 + a_4M_4) \\ &= T(a_1M_1) + T(a_2M_2) + T(a_3M_3) + T(a_4M_4) \\ &= a_1T(M_1) + a_2T(M_2) + a_3T(M_3) + a_4T(M_4) \\ &= a_1M_2 + a_2(M_3 + M_4) + a_3(M_2 - M_1) + a_4M_1 \\ &= (-a_3 + a_4)M_1 + (a_1 + a_3)M_2 + a_2M_3 + a_2M_4, \end{aligned}$$

onde usamos a linearidade de T e o facto de $T(M_1) = M_2, T(M_2) = M_3+M_4, T(M_3) = M_2 - M_1$ e $T(M_4) = M_1$.

c) Para obtermos a matriz $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ basta determinar as componentes da imagem dos vetores da base $\mathcal{B}$ na base $\mathcal{B}$. Como $T(M_1) = M_2, T(M_2) = M_3 + M_4, T(M_3) = M_2 - M_1$ e $T(M_4) = M_1$, as componentes de $T(M_1)$ são $(0, 1, 0, 0)$, as componentes de $T(M_2)$ são $(0, 0, 1, 1)$, as componentes de $T(M_3)$ são $(-1, 1, 0, 0)$, e as componentes de $T(M_4)$ são $(1, 0, 0, 0)$, e a matriz $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ é obtida escolhendo para colunas estes 4 vetores,

$$\mathcal{M}(T,\mathcal{B},\mathcal{B}) = \mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) Os valores próprios de $\mathcal{M}$ são as soluções da quação $\det(\mathcal{M} - \lambda I_4) = 0$, ou seja

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right),$$

e aplicando à última coluna o Teorema de Laplace obtem-se

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{M} - \lambda I_4) &= -\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \lambda\left(-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}\right) \\ &= -\lambda - \lambda(-\lambda(\lambda^2 - 1) - 1) = -\lambda(1 - \lambda^3 + \lambda - 1) \\ &= \lambda^2(\lambda^2 - 1) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1), \end{aligned}$$

e portanto temos um valor próprio, 0, com multiplicidade algébrica 2, e dois valores próprios, -1 e 1, com multiplicidade algébrica 1.

Convem recordar que dada A, uma matriz $n \times n$, então $\det(A - \lambda I_n) = 0$ é uma equação de grau n (em *lambda*), e portanto tem n raízes.

Os valores próprios associados a cada valor próprio λ são as soluções $X = (x, y, z, w)^\top$ (**não nulas**) do sistema $(\mathcal{M} - \lambda I_4)X = 0$. No caso de $\lambda = 0$ temos

$$\mathcal{M}X = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -z + w = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x = z = w \\ y = 0 \end{cases},$$

e portanto o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 0$ tem dimensão 1 e é gerado pelo vetor $(1, 0, -1, -1)$.

No caso de $\lambda = -1$ temos

$$(\mathcal{M} + I_4)X = 0 \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x - z + w = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ y + w = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ -y = z = w \end{cases},$$

e portanto o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = -1$ tem dimensão 1 e é gerado pelo vetor $(0, 1, -1, -1)$.

No caso de $\lambda = 1$ temos

$$(\mathcal{M} - I_4)X = 0 \iff \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -x - z + w = 0 \\ x - y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ y - w = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z = w \end{cases},$$

e portanto o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$ tem dimensão 1 e é gerado pelo vetor $(0, 1, 1, 1)$.

e) A nulidade (dimensão do núcleo) corresponde à dimensão do espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 0$, e já vimos na alínea anterior que é igual a 1.

A característica (dimensão da imagem) de T pode ser obtida usando o *Teorema da Dimensão* (Proposição 5.18, 3ªedição), neste caso

$$\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4 = \dim \operatorname{Nuc} T + \dim \operatorname{Im} T \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T = 4 - 1 = 3.$$

f) T não é diagonalizável porque $\mathcal{M}$ é uma matriz 4×4 e a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios não é igual a 4, neste caso vimos cada um dos três valores próprios tem multiplicidade 1, e portanto $1 + 1 + 1 = 3 \neq 4$.

Também podemos justificar que T não é diagonalizável reparando que $\mathcal{M}$ é uma matriz 4×4 e só tem três vetores próprios linearmente independentes.

V. a) Seja λ um valor próprio de E e v um valor próprio associado, ou seja tal que $v \neq 0$

e $T(v) = \lambda v$.Então, por um lado tem-se

$$T(v) = \lambda v \Rightarrow T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v,$$

e por outro

$$T(T(v)) = \mu T(v) = \mu(\lambda v) = \mu\lambda v.$$

Concluimo então que

$$\mu\lambda v = \lambda^2 v \Rightarrow (\mu\lambda - \lambda^2)v = 0 \Rightarrow \lambda(\mu - \lambda)v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \mu,$$

pois $v \neq 0$.

Assim os possíveis valores próprios da transformação T são μ e zero. existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $T^2(v) = \mu T(v),\ \forall v \in E$

b) Se $\mu \neq 1$ então 1 não é valor próprio de T e portanto $T - 1 \times I_n = T - I_n$ é invertível. Podemos então concluir que $S = -(T - I_n)$ também é invertível.

c) Se a característica de T é igual a 1, isso significa em particular que a imagem de T tem dimensão 1 e portanto é gerada por um vetor não nulo w, ou seja

$$\forall u \in E,\ \text{existe } \lambda_u \in \mathbb{R} \text{ tal que } T(u) = \lambda_u w,$$

em que λ_u depende de u. Em particular para $u = w$ tem-se $T(w) = \lambda_w w$. Então

$$\forall u \in E, T(T(u)) = T(\lambda_u w) = \lambda_u T(w) = \lambda_u \lambda_w w = \lambda_w(\lambda_u w) = \lambda_w T(u),$$

ou seja

$$\forall u \in E, T(T(u)) = \mu T(u),$$

onde $\mu = \lambda_w$.

d) Não, pois basta tomar para T a identidade e $\mu = 1$. Tem-se trivialmente $T(T(u)) = T(u)$ e a característica de T não é igual a 1 (pois por hipótese $n > 1$).