$\boxed{21082}$ - Relatório da Actividade Formativa 1

I - Escolha múltipla

Grelha de Correção

1. - c) **2.** - b) **3.** - d) **4.** - a) **5.** - d) **6.** - d) **7.** - a) **8.** - c) **9.** - b)

Justificação

1. A afirmação verdadeira é a **c)**. O diagrama de Ferrers da partição $4+3+2+2+1$ é:

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & & & \end{array}.$$

O diagrama conjugado é obtido trocando as linhas por colunas:

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & & & & \end{array}.$$

Portanto a partição conjugada é: $5+4+2+1$.

2. A afirmação verdadeira é a **b)**. De facto, temos que

$$f([4]\times[5]) = \{5(n-1)+m \colon n\in[4], m\in[5]\} = \bigcup_{i=0}^{3}\{5\times i+m \colon m\in[5]\}$$

$$= \{1,2,3,4,5\}\cup\{6,7,8,9,10\}\cup\{11,12,13,14,15\}\cup\{16,17,18,19,20\} = [20],$$

o que prova que f é sobrejectiva. As restantes afirmações são falsas:

- a) falsa: Por exemplo, $7>5$ é primo, logo $7\neq n\cdot m$, para quaisquer $n\in[4]$, $m\in[5]$.
- c) falsa: Por exemplo $20\neq n\cdot m-n-m+1$, para quaisquer $n\in[4]$, $m\in[5]$.
- d) é falsa: Por exemplo, $1\neq 5(n-1)+4(m-1)$, para quaisquer $n\in[4]$, $m\in[5]$.

3. Temos que

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{n!} = (2n)^{\underline{n}}\frac{1}{n!}.$$

Portanto a afirmação verdadeira é a **d)**.

4. A afirmação verdadeira é a **a)**. De facto, se $A = A_1\dot\cup A_2$, $A_1\neq\emptyset$, $A_2\neq\emptyset$ então A_1 terá entre 1 e $n-1$ objectos assim como A_2 e a escolha dos objectos para A_1 condiciona a de A_2. Portanto a resposta é:

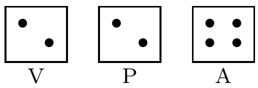
$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^n-2^1}{2-1} = \frac{2^n-2}{2} = 2^{n-1}-1.$$

5. A resposta é $(N+N^2)/2$ - **d)**. O primeiro convidado a chegar aperta a mão a uma pessoa (ao Sr. Grandevida). O segundo convidado aperta a mão a duas pessoas (ao Sr. Grandevida e ao primeiro convidado). O terceiro convidado aperta a mão a três pessoas. E assim sucessivamente. O último convidado, o N-ésimo, aperta a mão a N pessoas. Ao todo são $1+2+3+\cdots+N = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+N^2}{2}$ apertos de mão.
<u>Alternativa:</u> Há $N+1$ pessoas na festa (o Sr. Grandevida mais os seus N convidados). Todos apertam as mãos. Portanto, há $\binom{N+1}{2} = \dfrac{N+N^2}{2}$ apertos de mão.

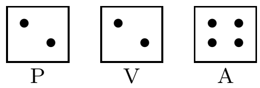
6. A afirmação verdadeira é a **d)**. Se as letras fossem todas distintas teríamos 7! maneiras de formar palavras com sete letras. Mas cada palavra com 3 S's e 2 O's originaria 3! 2! sequências distintas se os S's e os O's fossem distintos. Quer dizer que se k denota o número de maneiras de re-arranjar as letras da palavra SOSSEGO, temos $k \times (3!\,2!) = 7!$, ou seja que $k = \dfrac{7!}{3!\,2!}$.

7. O número 1 tem três lugares para ir. Para cada lugar fixo, os restantes três números podem ir para qualquer dos três lugares que sobejam, o que dá 3! possibilidades. Portanto a resposta é $3 \cdot 3!$, correspondente a **a)**.

8. A afirmação verdadeira é a **c)**. Cada resultado distinto corresponde a uma sequência do tipo $\underline{a}\,\underline{a}\,\underline{b}$, com $1 \leq a, b \leq 6$ e $a \neq b$. Existem 6 escolhas para o número "a" que repete. Existem 5 escolhas para sair um número "b" diferente. Como temos 3 dados (números) há 3! maneiras de os permutar. Mas sair



ou



obtemos o mesmo resultado - corresponde à mesma sequência $\underline{2}\,\underline{2}\,\underline{4}$. Assim o número pedido é: $\dfrac{6 \times 5 \times 3!}{2} = 90$.

9. A afirmação verdadeira é a **b)**. De facto, se X é enumerável então existe $g\colon \mathbb{N} \to X$ sobrejectiva e se, além disso, existe $f\colon X \to Y$ sobrejectiva, então temos que

$$\mathbb{N} \underset{\text{sob.}}{\xrightarrow{g}} X \underset{\text{sob.}}{\xrightarrow{f}} Y.$$

Logo $f \circ g\colon \mathbb{N} \to Y$ é sobrejectiva e, portanto, Y é enumerável. As restantes afirmações são falsas. Suponhamos que $X = \mathbb{R}$, $Y = \{0\}$. Então

$$h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & Y \\ i & \longmapsto & 0 \end{array} \qquad , \qquad f\colon \begin{array}{ccc} X = \mathbb{R} & \longrightarrow & Y \\ a & \longmapsto & 0 \end{array}$$

são sobrejectivas. Por outro lado, $X = \mathbb{R}$ não é enumerável. Assim (ii) e (iii) são afirmações verdadeiras, mas (i) é falsa. Portanto a) e c) são falsas. Mais $\#\mathbb{R} > \aleph_0$, donde d) também é falsa.

II - Problemas

10. Consideremos os conjuntos de sequências de números naturais

$$A = \{s = a_1a_2a_3a_4 \mid 1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \leq 100\},$$

$$B = \{s = b_1b_2b_3b_4 \mid b_i \geq 1\,,\ \textstyle\sum_{i=1}^4 b_i \leq 100\}.$$

Seja

$$f\colon A \to B \ \text{ definida por } \ s = a_1a_2a_3a_4 \overset{f}{\longmapsto} s' = a_1(a_2-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_3).$$

Temos que $a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) = a_4 \leq 100$ donde $s' = a_1(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_3) \in B$. Por outro lado, dados quaisquer $s = a_1a_2a_3a_4, s' = b_1b_2b_3b_4 \in A$, tem-se

$$f(a_1a_2a_3a_4) = f(b_1b_2b_3b_4) \iff \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 - a_1 = b_2 - b_1 \\ a_3 - a_2 = b_3 - b_2 \\ a_4 - a_3 = b_4 - b_3 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \\ a_4 = b_4 \end{cases} \iff s = s',$$

o que prova que f é uma correspondência injectiva entre A e B. Provemos, agora, que é *sobrejectiva*, ou seja que $\forall s' \in B\, \exists s \in A\colon f(s) = s'$. Seja $s' = b_1b_2b_3b_4 \in B$. Então $1 \leq b_1 < b_1 + b_2 < b_1 + b_2 + b_3 < \sum_{i=1}^4 b_i \leq 100$, donde $s = b_1(b_1 + b_2)(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \in A$. Além disso, $f(s) = b_1b_2b_3b_4 = s'$, o que prova que f é sobrejectiva. Portanto f é uma correspondência biunívoca entre A e B.

11. Seja A um conjunto finito de pessoas e suponhamos que $\#A \geq 2$. Para cada $a \in A$, seja $A(a) = \{b \in A \mid b \neq a, b \text{ é amigo de } a\} \subseteq A \setminus \{a\}$. Note que $\#A(a)$ é o número de amigos da pessoa a. Temos 3 casos a considerar:

<u>1º caso</u>: Todas as pessoas de A têm amigos, isto é, $\forall a \in A, 1 \leq \#A(a) \leq n - 1$. Neste caso, consideremos a correspondência

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & A & \longrightarrow & \{1, 2, \ldots, n-1\} = [n-1] \\ & a & \longmapsto & \#A(a) \end{array}.$$

Como $\#A = n > n - 1 = \#[n-1]$, Φ não é injectiva - pelo *Teorema dos Cacifos*. Portanto, existem pessoas $a \neq a'$ tais que $\Phi(a) = \Phi(a')$, ou seja existem duas pessoas com o mesmo número de amigos.

<u>2º caso</u>: Apenas uma pessoa de A não tem amigos, isto é, $\exists! a \in A\colon \#A(a) = 0$. Logo $A' = A \setminus \{a\}$ tem $n - 1$ pessoas e todas as pessoas de A' têm amigos, isto é, $\forall a' \in A', 1 \leq \#A(a') \leq n - 2$. Neste caso, consideremos a correspondência

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & A' & \longrightarrow & \{1, 2, \ldots, n-2\} = [n-2] \\ & a' & \longmapsto & \#A(a') \end{array}.$$

Pelo *Teorema dos Cacifos*, Φ não é injectiva, logo existem duas pessoas com o mesmo número de amigos.

<u>3º caso</u>: Existem, pelo menos, duas pessoas sem amigos. Sejam elas a e b. Logo $\#A(a) = 0 = \#A(b)$ e, neste caso, o resultado também está provado.

Note-se que estes casos são todos os possíveis e, como em cada um deles, provámos que existem duas pessoas com o mesmo número de amigos, então o resultado está provado.

12. a) O número de maneiras de escolher cinco pessoas de entre de onze pessoas é $\binom{11}{5}$.

b) O número de maneiras de escolher dois professores é $\binom{4}{2}$. Para cada uma destas escolhas, temos depois de escolher mais três alunos de entre sete, que podemos fazer de $\binom{7}{3}$ maneiras diferentes. Assim, pelo princípio da multiplicação, temos $\binom{4}{2}\binom{7}{3}$ escolhas possíveis.

c) O número de grupos de cinco pessoas que inclui exactamente três professores é $\binom{4}{3}\binom{7}{2}$ (por um raciocínio análogo ao da alínea anterior). O número de grupos que inclui exactamente quatro professores é 7 (basta escolher um aluno para juntar aos quatro professores). Assim a resposta é $\binom{4}{3}\binom{7}{2} + 7$.

13. a) Existem $5!\,5!$ maneiras de os rapazes se sentarem nos 5 lugares à esquerda (e portanto as raparigas nos 5 lugares mais à direita), pois tanto os rapazes com as raparigas podem permutar-se entre si.

b) Consideremos primeiro a disposição das raparigas e depois a dos rapazes. Existem 5! maneiras de dispor as raparigas. Como os rapazes não podem ficar juntos existem 6 lugares possíveis para os rapazes se sentarem e como são 5, podem ser dispostos de $6^{\underline{5}} = 6!$ maneiras. Portanto, pelo princípio da multiplicação, o número pedido é $5!\,6!$.
<u>Alternativa:</u> Consideremos primeiro a disposição dos rapazes e depois a das raparigas. Existem 5! maneiras de dispor os rapazes. Entre cada rapaz temos de sentar uma rapariga. Existem $\binom{5}{4} = 5$ maneiras de escolher uma rapariga de entre 5, para os 4 lugares, e elas têm 4! maneiras de se permutarem. A restante rapariga tem 6 lugares possíveis para se sentar. Portanto o número pedido é $5!\binom{5}{4}4!\cdot 6 = 5!\,6!$.

c) Como o Pancrácio e a Engrácia têm de ficar lado a lado podemos considerá-lo como um bloco de dois elementos que podem ser permutados de 2! maneiras e que têm 9 maneiras de se sentarem. Os restantes oito têm 8! maneiras de se sentarem. Portanto a resposta é $2\cdot 9\cdot 8! = 2\cdot 9!$.

14. a) O número de mãos existentes é exactamente o número de subconjuntos com 2 elementos de um conjunto com 52, isto é $\binom{52}{2}$.

b) Existem 4 naipes e cada naipe tem 13 cartas. Existem $\binom{13}{1} = 13$ maneiras de escolher uma carta entre 13. Para cada escolha, existem $\binom{4}{2}$ maneiras de escolher 2 naipes entre 4. Portanto o número de mãos de 2 cartas que formam um par é $13\cdot\binom{4}{2} = 13\cdot 6 = 78$.

c) Existem $\binom{4}{1} = 4$ maneiras de escolher um naipe entre 4. Para cada escolha fixa do naipe, existem $\binom{13}{3}$ maneiras de escolher 3 cartas entre 13. A restante carta tem de pertencer a outro naipe, isto é tem de ser escolhida entre $52 - 13 = 39$ cartas, e tem $\binom{39}{1} = 39$ escolhas possíveis. Portanto o número pedido é $4\cdot\binom{13}{3}\cdot 39$.

15. a) Como não se podem repetir números temos $10^{\underline{6}} = \binom{10}{6}\times 6!$ possibilidades.

b) Temos $\binom{6}{4}$ escolhas para 4 posições correctas para os 6 algarismos indicados pela Lídia. Como os outros dois estão no lugar errado, só há uma posição correcta para eles que é trocá-los entre si. Portanto a resposta é $\binom{6}{4} = 15$.

c) Temos $\binom{6}{3}$ escolhas para 3 posições correctas para os 6 algarismos indicados pela Lídia. Para cada posição correcta dos três algarismos existem 2 possibilidades para os outros três algarismos que estão no lugar errado. Por exemplo, supondo que 2, 3, 5 estão na posição correcta então 0, 1 e 4 estão na posição errada

$$\underset{\substack{\uparrow\\ 1 \text{ ou } 4}}{\_}\quad \overset{\substack{4 \text{ ou } 0\\ \downarrow}}{\_}\quad \underline{2}\quad \underline{3}\quad \underset{\substack{\uparrow\\ 0 \text{ ou } 1}}{\_}\quad \underline{5},$$

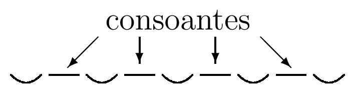
e os números possíveis são: 142305, 402315. Assim, a resposta é $\binom{6}{3} \times 2 = 40$.

d) Temos $\binom{6}{3}$ escolhas para 3 posições correctas para os 6 algarismos indicados pela Lídia. Como a Lídia errou 3 algarismos, então os números nas condições pedidas têm de usar 3 de entre os $10 - 6 = 4$ algarismos não utilizados pela Lídia. Existem $\binom{4}{3}$ escolhas para esses algarismos. Para cada escolha fixa esses algarismos podem permutar de 3! maneiras. Portanto, pelo princípio da multiplicação, a resposta é $\binom{6}{3} \times \binom{4}{3} \times 3! = 480$.

16. a) Existem $\dfrac{7!}{3!}$ maneiras, pois há três letras iguais.

b) Podemos considerar os três A's como um bloco, como uma entidade única. Assim, temos que permutar cinco entidades: as letras consoantes C, H, M, D e o bloco AAA. A resposta é, portanto, 5!.

c) Primeiro ordenamos as quatro letras consoantes. Há 4! maneiras de fazer isto. Os três A's devem depois espalhar-se pelos seguintes cinco lugares: antes da primeira consoante, entre a primeira e a segunda, entre a segunda e a terceira, entre a terceira e a quarta ou depois da última consoante



5 lugares possíveis para os A's

Há $\binom{5}{3}$ possibilidades de escolher três lugares de entre cinco. Assim, a resposta final é

$$4!\binom{5}{3}.$$

<u>Alternativa:</u> Começamos por contar o número de maneiras de re-arranjar as letras de modo a que ocorram dois A's consecutivos. Se considerarmos dois A's como sendo um bloco e permutarmos este bloco com as restantes letras C, H, M, D e A, ficamos com 6! permutações. No entanto, quando os três A's calham ficar em bloco há uma sobrecontagem (em que contamos duas vezes os casos em que os três A's aparecem em bloco – contagem esta que fizémos na alínea anterior). Assim, o número de maneiras de re-arranjar as letras de modo a que ocorram dois A's consecutivos é $6! - 5!$. Logo, o número de maneiras de re-arranjar as letras de modo a que *não* ocorram dois A's consecutivos é

$$\frac{7!}{3!} - (6! - 5!).$$

[Pode confirmar que este resultado coincide com o anterior.]

17. a) Pelo teorema binomial,

$$(3a-b)^{11} = \sum_{i=0}^{11} \binom{11}{i} (3a)^i (-b)^{11-i} = \sum_{i=0}^{11} \binom{11}{i} 3^i (-1)^{11-i} a^i b^{11-i}.$$

Logo, o coeficiente de a^3b^8 obtém-se quando $i = 3$ e dá $\binom{11}{3} 3^3(-1)^{11-3} = \binom{11}{3} 27$.

b) Como

$$(2x+3y+4z)^7 = \sum_{\substack{0\le i,j,k\le 7\\ i+j+k=7}} \binom{7}{i,j,k} (2x)^i(3y)^j(4z)^k = \sum_{\substack{0\le i,j,k\le 7\\ i+j+k=7}} \frac{7!}{i!\,j!\,k!}(2x)^i(3y)^j(4z)^k,$$

x^4y^2z ocorrerá quando $i = 4$, $j = 2$, $k = 1$. Portanto o coeficiente pedido é

$$\frac{7!}{4!\,2!\,1!}2^4 \cdot 3^2 \cdot 4 = 7! \cdot 12.$$

18. Para $n = 0$, tem-se $1 + \sum_{j=0}^{0} j(n+1)^{\underline{n-j}} = 1 + 0 = 1$, com o que fica provado o caso base. Em seguida, escolhido e fixado um $n \in \mathbb{N}$, suponhamos que

$$(n+1)! = 1 + \sum_{j=0}^{n} j(n+1)^{\underline{n-j}} \qquad \text{(Hipótese de Indução)}$$

Pretende-se provar que

$$(n+2)! = 1 + \sum_{j=0}^{n+1} j(n+2)^{\underline{(n+1)-j}} \qquad \text{(Tese de Indução)}$$

Passo de Indução: Tem-se

$$\begin{aligned}
(n+2)! &= (n+2)(n+1)! = (n+2)\left(1 + \sum_{j=0}^{n} j(n+1)^{\underline{n-j}}\right) \qquad \text{(pela hipótese indução)}\\
&= (n+2) + \sum_{j=0}^{n} j(n+2)(n+1)^{\underline{n-j}} = (n+2) + \sum_{j=0}^{n} j(n+2)^{\underline{n-j+1}}\\
&= 1 + (n+1) + \sum_{j=0}^{n} j(n+2)^{\underline{n-j+1}} = 1 + \sum_{j=0}^{n+1} j(n+2)^{\underline{(n+1)-j}}.
\end{aligned}$$

Conclusão: Pelo método de indução matemática fica provada a igualdade do enunciado para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

19. Temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \qquad \text{(Lei da Simetria)}\\
&= \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}. \qquad \text{(Convolução de Vandermonde)}
\end{aligned}$$

20. a) Como $\mathcal{P}_i([k]) = \{A \subseteq [k] \mid \#A = i\}$, o primeiro membro da igualdade é $\binom{k}{i} = \#\mathcal{P}_i([k])$. Por outro lado, tem-se

$$\mathcal{P}_i([k]) = B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup B_3 \dot\cup B_4$$

onde

$$B_1 = \{A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon 1, 2 \notin A\} \ , \ B_2 = \{A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon 1 \in A,\ 2 \notin A\} \ ,$$
$$B_3 = \{A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon 2 \in A,\ 1 \notin A\} \ , \ B_4 = \{A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon 1, 2 \in A\}.$$

Ora $\#B_1 = \binom{k-2}{i}$ = número de subconjuntos de $[k] \setminus \{1, 2\}$ com i elementos, $\#B_2 = \#B_3 = \binom{k-2}{i-1}$ = número de subconjuntos de $[k] \setminus \{1, 2\}$ com $i - 1$ elementos, $\#B_4 = \binom{k-2}{i-2}$ = número de subconjuntos de $[k] \setminus \{1, 2\}$ com $i - 2$ elementos. Segue-se que

$$\binom{k}{i} = \binom{k-2}{i} + 2\binom{k-2}{i-1} + \binom{k-2}{i-2}.$$

b) Como em a) temos que:

$$\mathcal{P}_i([k]) = \{A \subseteq [k] \mid \#A = i\} = B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup B_3 \dot\cup B_4 \dot\cup B_5 \dot\cup B_6 \dot\cup B_7 \dot\cup B_8,$$

onde

$$B_1 = \{A \in \mathcal{P}_i([k])\colon 1,2,3 \notin A\} \;\;,\;\; B_2 = \{A \in \mathcal{P}_i([k])\colon 1 \in A,\; 2,3 \notin A\}\;,$$

$$B_3 = \{A \in \mathcal{P}_i([k])\colon 2 \in A,\; 1,3 \notin A\} \;\;,\;\; B_4 = \{A \in \mathcal{P}_i([k])\colon 3 \in A,\; 1,2 \notin A\}\;,$$

$$B_5 = \{A \in \mathcal{P}_i([k])\colon 1,2 \in A,\; 3 \notin A\} \;\;,\;\; B_6 = \{A \in \mathcal{P}_i([k])\colon 1,3 \in A,\; 2 \notin A\}\;,$$

$$B_7 = \{A \in \mathcal{P}_i([k])\colon 2,3 \in A,\; 1 \notin A\} \;\;,\;\; B_8 = \{A \in \mathcal{P}_i([k])\colon 1,2,3 \in A\}.$$

Com um argumento análogo, $\#B_1 = \binom{k-3}{i}$, $\#B_2 = \#B_3 = \#B_4 = \binom{k-3}{i-1}$, $\#B_5 = \#B_6 = \#B_7 = \binom{k-3}{i-2}$, $\#B_8 = \binom{k-3}{i-3}$. Segue-se que

$$\binom{k}{i} = \binom{k-3}{i} + 3\binom{k-3}{i-1} + 3\binom{k-3}{i-2} + \binom{k-3}{i-3}.$$

21. a) Por indução em m. O caso base em que m é n reduz-se à igualdade $1 = 1$. Admitamos agora, por hipótese de indução, que a igualdade se verifica para m, com vista a argumentá-la para $m+1$. Vem:

$$\sum_{k=n}^{m+1}\binom{k}{n} = \sum_{k=n}^{m}\binom{k}{n} + \binom{m+1}{n} \underset{\text{hip. ind.}}{=} \binom{m+1}{n+1} + \binom{m+1}{n} \underset{\text{Lei de Pascal}}{=} \binom{m+2}{n+1}.$$

b) O número de possibilidades de escolher $n+1$ números do conjunto $\{0,1,2,\ldots,m\}$ com $m+1$ elementos é $\binom{m+1}{n+1}$. O maior número escolhido pode variar desde n a m (incluindo os extremos). Quando $n+i$ $(0 \le i \le m-n)$ é o maior número escolhido, há $\binom{n+i}{n}$ possibilidades de escolher os restantes n números, visto que os restantes n números têm que se escolher no conjunto $\{0,1,2,\ldots,n+1-i\}$ com $n+i$ elementos. Assim, o número total de possíveis escolhas é

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{m}{n} = \sum_{k=n}^{m}\binom{k}{n}.$$

22. Cada eleitor, ou vota num dos 5 candidatos, ou vota em branco (não se pode abster!). Esta situação é equivalente a votar em 6 candidatos (um voto em branco conta como um voto num sexto candidato). Sendo assim, cada eleitor tem 6 escolhas diferentes para atribuir o seu voto. No entanto, tratando-se de voto secreto, não interessa saber qual o candidato em que determinada pessoa votou. Por outras palavras, os 500 eleitores são indistinguíveis e os seus 500 votos têm de ser distribuídos por 6 candidatos. O problema é, portanto, equivalente a distribuir 500 bolas iguais por 6 caixas distintas. Em conclusão, existem

$$\binom{500+6-1}{500} = \binom{505}{5}$$

escrutínios diferentes.

23. Há $6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6$ maneiras de distribuir 4 maçãs <u>distintas</u> por 6 sacos <u>distintos</u>.

Para distribuir 8 laranjas <u>idênticas</u> por 6 sacos <u>distintos</u>, utilizamos o truque dos separadores (*vide* discussão da entrada 4 da tabela da secção 1.4). Assim 5 separadores distinguem os 6 sacos, enquanto as 8 laranjas podem colocar-se entre eles (e nos términos) arbitrariamente. Corresponde a formar sequências binárias de comprimento $13 = 5 + 8$ com 5 uns (os separadores) e 8 zeros (as laranjas). Por exemplo,

$$\underbrace{0}_{\text{saco 1}}1\underbrace{}_{\text{saco 2}}1\underbrace{0\,0\,0}_{\text{saco 3}}1\underbrace{0}_{\text{saco 4}}1\underbrace{0\,0}_{\text{saco 5}}1\underbrace{0}_{\text{saco 6}} \longleftrightarrow \begin{cases} \text{saco 1: 1 laranja} \\ \text{saco 2: 0 laranjas} \\ \text{saco 3: 3 laranjas} \\ \text{saco 4: 1 laranja} \\ \text{saco 5: 2 laranjas} \\ \text{saco 6: 1 laranja} \end{cases}.$$

O número de tais sequências distintas é $\dfrac{13!}{5!8!} = \dbinom{13}{5}$. Portanto a resposta final é $6^4 \cdot \dbinom{13}{5}$.

24. Como $x_2 \geq x_1$, podemos escrever $x_2 = x_1 + y$, onde y é um número natural qualquer. Assim, o problema é equivalente a saber quantas soluções tem a equação $2x_1 + y + x_3 = 100$, com x_1, y e x_3 números naturais. Para resolver este problema vamo-nos socorrer do método dos separadores (*vide* solução do problema 5 da página 77). Temos que contar o número de maneiras de colocar dois separadores para separar 100 itens, em que o primeiro separador só pode ocupar uma posição que deixe um número par de itens antes dele (para que determine o valor de x_1). Se não houvesse esta última restrição, a solução seria $\dbinom{102}{2}$. Devido a esta última restrição, o primeiro separador tem que estar entre as posições 1,3,5, …,99 e 101. Depois, o outro separador pode estar numa das quaisquer posições posteriores. Em suma, se o primeiro separador está na posição $2i+1$, onde $0 \leq i \leq 50$, então o segundo separador pode ocupar $101 - 2i$ posições. Logo, há $\sum_{i=0}^{50}(101-2i)$ maneiras de colocar convenientemente os separadores. Fazendo uns pequenos cálculos, vem:

$$\sum_{i=0}^{50}(101-2i) = 101 \cdot 51 - 2\sum_{i=0}^{50} i = 101 \cdot 51 - 2\frac{50 \cdot 51}{2} = (101-50)51 = 51^2 = 2601.$$

25. a) A pessoa mais velha pode nascer em qualquer mês. A segunda pessoa mais velha, só pode nascer em onze meses. A terceira, em dez meses. E assim sucessivamente. Ao todo $12^{\underline{9}}$ possibilidades.

b) Vamos utilizar a manobra da passagem ao complementar (*vide* a secção 1.5.1). Seja H (resp., M, C) o número de possibilidades aniversariantes das nove pessoas em causa pelos doze meses com a restrição dos dois homens (resp., três mulheres, quatro crianças) nascerem no mesmo mês. Vem facilmente:

$$\#H = 12 \cdot 12^7 = 12^8 \ \ , \ \ \#M = 12 \cdot 12^6 = 12^7 \ \ , \ \ \#C = 12 \cdot 12^5 = 12^6,$$
$$\#(H \cap M) = 12 \cdot 12 \cdot 12^4 = 12^6 \ \ , \ \ \#(H \cap C) = 12 \cdot 12 \cdot 12^3 = 12^5,$$
$$\#(M \cap C) = 12 \cdot 12 \cdot 12^2 = 12^4 \ \ , \ \ \#(H \cap M \cap C) = 12 \cdot 12 \cdot 12 = 12^3$$

- por exemplo $\#H = 12 \cdot 12^7 = 12^8$ porque $12 = \dbinom{12}{1}$ é o número de escolhas do mês em que nascem os dois homens e, para cada escolha fixa, as restantes 7 pessoas têm 12^7 possibilidades aniversariantes (porque não há restrições). Pelo princípio da inclusão/exclusão, vem:

$$\#(H \cup M \cup C) = 12^8 + 12^7 + 12^6 - 12^6 - 12^5 - 12^4 + 12^3.$$

Como o número total de possibilidades é 12^9, a solução é:

$$12^9 - \#(H \cup M \cup C) = 12^9 - 12^8 - 12^7 + 12^5 + 12^4 - 12^3.$$

26. Designemos por X o conjunto dos 200 alunos do 1º ano do curso de Matemática, e consideremos os subconjuntos:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{x \in X \colon x \text{ aprovou a Álgebra Linear}\},\\
A_2 &= \{x \in X \colon x \text{ aprovou a Análise 1}\},\\
A_3 &= \{x \in X \colon x \text{ aprovou a Geometria}\}.
\end{aligned}
$$

Como reprovaram 25 alunos a todas as disciplinas, então $25 = \#(X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#X - \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 200 - \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. Portanto $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 175$. Por outro lado, o princípio de inclusão/exclusão diz-nos que:

$$
\begin{aligned}
175 = \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= (\#A_1 + \#A_2 + \#A_3)\\
&\quad - [\#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_3) + \#(A_2 \cap A_3)] + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\\
&= 120 + 82 + 47 - [\#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_3) + \#(A_2 \cap A_3)] + 10.
\end{aligned}
$$

Segue-se que

$$
\#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_3) + \#(A_2 \cap A_3) = 259 - 175 = 84.
$$

Agora, o nº alunos que tem <u>exactamente</u> **1** disciplina por fazer é a soma do nº alunos que aprovou a duas disciplinas mas não aprovou à outra:

$$
\begin{aligned}
n &= \#[(A_1 \cap A_2) \setminus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)] + \#[(A_1 \cap A_3) \setminus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)]\\
&\quad + \#[(A_2 \cap A_3) \setminus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)]\\
&= \#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_3) + \#(A_2 \cap A_3) - 3\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\\
&= 84 - 30 = 54.
\end{aligned}
$$

27. Designemos por X o conjunto das palavras distintas que se podem escrever com todas as letras da palavra SANGUESSUGA, e consideremos os subconjuntos:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{\text{palavras de } X : \text{ aparecem 3 } S\text{'s consecutivos}\},\\
A_2 &= \{\text{palavras de } X : \text{ aparecem 2 } A\text{'s consecutivos}\},\\
A_3 &= \{\text{palavras de } X : \text{ aparecem 2 } U\text{'s consecutivos}\}.
\end{aligned}
$$

Então o número pedido é $\#(X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#X - \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, uma vez que nem os três S's, nem os dois A's, nem os dois U's podem aparecer em bloco. Ora o princípio de inclusão/exclusão diz-nos que:

$$
\begin{aligned}
\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= (\#A_1 + \#A_2 + \#A_3)\\
&\quad - [\#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_3) + \#(A_2 \cap A_3)]\\
&\quad + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3).
\end{aligned}
$$

Temos, agora, que contar os elementos de cada um destes conjuntos:

$$
\#X = \frac{11!}{3!2!2!2!}\ ,\ \#A_1 = \frac{9!}{2!2!2!}\ ,\ \#A_2 = \#A_3 = \frac{10!}{3!2!2!}\ ,
$$

$$
\#(A_1 \cap A_2) = \#(A_1 \cap A_3) = \frac{8!}{2!2!}\ ,\ \#(A_2 \cap A_3) = \frac{9!}{3!2!}\ ,\ \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{7!}{2}.
$$

De facto, o cálculo de $\#X$ tem uma justificação idêntica à do exercício 3. Quanto a $\#A_1$, os 3 S's consecutivos funcionam como um bloco e, portanto, argumentamos para 9 letras com 2 A's, 2 U's e 2 G's. Quanto a $\#(A_1 \cap A_2)$, os 3 S's consecutivos funcionam como um bloco, os 2 A's consecutivos como outro bloco e, portanto, argumentamos para 8 letras com 2 U's e 2 G's. Analogamente se justificam as restantes contagens. Portanto o número pedido é

$$
\frac{11!}{3!2!2!2!} - \frac{9!}{2!2!2!} - 2\frac{10!}{3!2!2!} + 2\frac{8!}{2!2!} + \frac{9!}{3!2!} - \frac{7!}{2}\ .
$$

FIM