21165 - Geometria

Ano lectivo 2017/18

Docente: António Araújo

e-fólio A (16 a 22 de Abril)

Para a resolução do e-fólio, aconselha-se que:

- Verifique se o ficheiro que recebeu está correcto. O e-fólio consiste de 1 página com 3 problemas e termina com a palavra FIM.
- Como o e-fólio tem um tempo prolongado de resolução, espera-se que as respostas que enviar estejam legíveis, com boa apresentação e organização. Deve fazer à parte o trabalho auxiliar e enviar apenas uma versão final, "limpa". Deve digitalizar a sua resolução de forma legível, ou executá-la directamente em formato digital (aceita-se word, pdf, ou scans em jpeg, png ou tiff - se usar varios ficheiros envie apenas um arquivo com todos eles, em rar ou zip). Respostas ilegíveis não serão cotadas, por isso verifique bem o seu ficheiro antes de enviar.
- Justifique cuidadosamente todas as suas respostas. Apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio.
- Tenha em atenção o prazo de entrega do e-fólio e as indicações para submeter a resolução disponibilizadas na sala de aulas virtual.
- O e-fólio é um trabalho individual. Pode utilizar recursos externos (pesquisa online, literatura, etc) mas não pode pedir ajuda a terceiros nem discutir os problemas com os seus colegas.

Critérios de avaliação e cotação:

- Este e-fólio tem a cotação total de 4 valores. 1a questão: 2 valores; 2a questão: 1 valor; 3a questão: 1 valor. assim distribuídos: todas as questões têm a mesma cotação.

Por favor preencha os seus dados:

- Nome:
- B.I:
- Nº de Estudante'
- Curso:

Problema 1. *Considere o plano de incidência das cúbicas de $\mathbb{R}^2$, assim definido: os pontos são os pontos ordinários de $\mathbb{R}^2$. As linhas são de dois tipos:*

I) as rectas verticais de $\mathbb{R}^2$

II) as curvas cúbicas da forma

$$y = (ax + b)^3$$

com a, b números reais.

a) Mostre que as rectas horizontais de $\mathbb{R}^2$ são linhas deste plano.

b) Mostre que o plano das cúbicas verifica os axiomas de incidência $A_1 - A_3$.

c) Obtenha a linha que passa pelos pontos $P = (8, -27)$, Q =(1,-1).

d) Seja l a linha $y = x^3$. Obtenha uma linha paralela a l que passe por $P = (2, 1)$.

e) Diga, justificando, se o plano das cúbicas é afim.

a) Fazendo $a = 0$ temos $y = b$, uma recta horizontal.

b) Axioma A_1: Tomemos dois pontos $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2)$. Queremos encontrar uma curva $y = (ax + b)^3$ que passa por estes dois pontos, e mostrar que é única. Trata-se de encontrar os valores dos parâmetros a, b. Ora a curva tem que passar por ambos os pontos, ou seja, a, b têm que verificar o sistema

$$\begin{cases} y_1 = & (ax_1 + b)^3 \\ y_2 = & (ax_2 + b)^3 \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{cases} y_1^{1/3} = & ax_1 + b \\ y_2^{1/3} = & ax_2 + b \end{cases}$$

Note-se agora os seguintes casos particulares: se $y_1 = y_2$, o sistema tem como única solução $a = 0, b = y_1^{1/3}$ (assumindo que os pontos sãpo distintos, e portanto $x_1 \neq x_2$). Trata-se de uma recta horizontal.

Se $x_1 = x_2$ então obtemos $y_1 = y_2$, o que é absurdo. Ou seja, não há solução na forma de uma cúbica. Mas nesse caso os pontos $P = Q$ estão sobre uma linha do outro tipo: uma recta vertical, e de novo há uma linha única desse tipo que os atravessa.

Resta considerar o caso em que $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$.

Por subtracção das duas equações do sistema obtemos,

$$y_1^{1/3} - y_2^{1/3} = a(x_1 - x_2)$$

e portanto

$$\begin{cases} a = \dfrac{y_1^{1/3} - y_2^{1/3}}{x_1 - x_2} \\ b = y_1^{1/3} - ax_1 \end{cases}$$

Ou seja, existe uma única cúbica que passa pelos dois pontos.

Axioma A_2: No caso das rectas segue directamente das propriedades do plano cartesiano real. No caso das cúbicas segue do facto de que estas são gráficos de funções sobre $\mathcal{R}$, pelo que têm uma infinidade de pontos.

Axioma A_3: De novo segue das cúbicas serem gráficos de funções. Tomemos por exemplo os pontos $P = (0,0), Q = (1,1), R = (1,-1)$. Os três pontos não estão obviamente sobre uma recta vertical, mas como há dois deles numa mesma vertical, não podem ambos estar sobre uma mesma cúbica, já que estas curvas intersectam cada vertical uma única vez.

c)

Basta substituir as coordenadas de P e Q no sistema

$$\begin{cases} a = \dfrac{y_1^{1/3} - y_2^{1/3}}{x_1 - x_2} \\ b = y_1^{1/3} - ax_1 \end{cases}$$

e obtemos

$a = -2/7, b = -5/7$

ou seja, a linha que passa por P e Q é a cúbica

$$y = (-2/7x - 5/7)^3.$$

d) e e) Vamos investigar quando é que duas cúbicas se intersectam (o caso das intersecções entre rectas horizontais e cúbicas é trivial - há sempre um único ponto de intersecção).

Se duas cúbicas se intersectam num ponto (x, y) temos

$$y = (a_1x + b_1)^3 = (a_2x + b_2)$$

o que equivale a

$$a_1x + b_1 = a_2x + b_2$$

pelo que quando $a_1 \neq a_2$ temos um único ponto de intersecção determinado por

$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}, \quad y = \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_1 - a_2}$$

e quando $a_1 = a_2$ temos que $b_1 = b_2$, ou seja, curvas com a_i idênticos só se intersectam se forem a mesma curva.

Em resumo: cúbicas distintas com coeficiente a idêntico não se intersectam. Cúbicas com coeficiente a distinto intersectam-se num único ponto.

Suponhamos agora que temos uma linha l dada pela equação

$$y = (ax + b)^3$$

e um ponto $P = (x_0, y_0)$, fora de l. Quantas linhas paralelas a l passam por P?

É trivial (verifique!) que l intersecta qualquer linha horizontal, por isso descartamos essas linhas.

Já vimos que qualquer curva do tipo

$$y = (ax + c)^3$$

que passe por P será paralela a l porque tem o mesmo coeficiente a que l. Temos uma infinidade de valores possíveis para c. No entanto, como a curva tem que passar por P, temos que

$$y_0 = (ax_0 + c)^3$$

de onde tiramos que

$$c = y_0^{1/3} - ax_0$$

pelo que a linha fica unicamente determinada.

Há portanto uma única linha paralela a l passando por P.

No caso em que l é uma recta horizontal, e portanto intersecta qualquer cúbica, a única paralela por P será a única recta horizontal que passa por P.

Sendo assim, o plano é afim.

O caso da alínea e) é agora imediato, bastando aplicar as expressões para c obtidas acima. Dada a linha l definida por $y = x^3$ $(a = 1, b = 0)$ e o ponto $P = (x_0, y_0) = (2, 1)$ a única cúbica que passa por P e é paralela a l é dada por

$$y = (x - 1)^3.$$

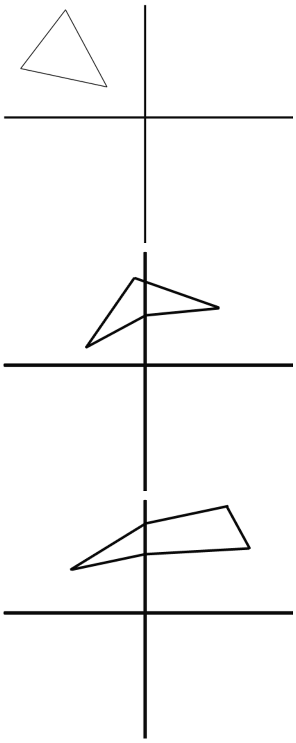
Problema 2. *Mostre, apresentando um exemplo concreto em cada caso, que um triângulo de Moulton pode possuir, quando visto como polígono euclideano no sentido usual,*

a) 3 lados

b) 4 lados

c) 5 lados
ou, se achar que algum dos casos é impossível, justifique porquê.

Solução:
Abaixo apresentam-se triângulos de Moulton com 3, 4, e 5 lados euclideanos. Note-se que o número de lados é controlado pelo número de linhas de declive positivo que cruzam a recta x=0. Em particular, os triângulos que não cruzam o eixo vertical são triângulos euclideanos usuais.



Problema 3. *Considere $E = \mathbb{R}^2$ o plano cartesiano com a noção de incidência usual. Dê um exemplo de uma função $d : E \times E \to \mathbb{R}$ tal que que d seja uma distância sobre E, e que (E,d) não seja modelo do axioma da medição linear. (Demonstre ambas as propriedades)*

Solução:
Tome-se a função distância d definida por $d(P,Q) = 0$ se $P = Q$ e $d(P,Q) = 1$ se $P \neq Q$. É fácil verificar os três axiomas de distância (exercício). Vamos mostrar que não existem sistemas de coordeandas para esta distância. Seja r uma recta e seja f um sistema de coordenadas sobre r. Como f é sistema de coordenadas e portanto isomorfismo podemos escolher sobre a recta três pontos distintos P, Q, e R, tais que $f(P) = 0$ e $f(Q), f(R) > 0$. Mas então, porque $1 = d(Q,P) = |f(Q) - f(P)| = f(Q) - f(P)$ e $1 = d(R,P) = |f(R) - f(P)| = f(R) - f(P)$ temos que $f(R) = f(Q)$, o que é absurdo pois f é por hipótese injectiva. Outra demonstração: Seja P tal que $f(P) = 0$. Então para qualquer $Q \neq P$, $d(P,Q) = |f(P) - f(Q)| = |f(Q)| = 1$. Então $f(Q) = 1$ ou $f(Q) = -1$ para todo o $Q \neq P$. Então f não é sobrejectiva.