Matemática Finita | 21082

Proposta de Resolução Sumária

Grelha de correção das respostas de escolha múltipla:

1.	2.	3.
C)	B)	B)

4. A argumentação apresentada pelo estudante conduz a sobrecontagem. Com efeito, suponhamos que entre 10 elementos encontram-se a Catarina e o António. Pelo argumento apresentado pelo estudante, a Catarina pode ser a primeira pessoa a ser escolhida e, entre os 5 homens, pode surgir o António. Mas pode acontecer que o António seja o primeiro elemento a ser escolhido e, entre as 5 mulheres, surja a Catarina. Ou seja, o casal constituído pela Catarina e pelo António é contabilizado duas vezes. O mesmo acontece com qualquer outro casal, o que significa que qualquer casal é duplamente contabilizado.

Por forma a eliminar a sobrecontagem, a solução passa por limitar a primeira escolha a apenas um dos sexos. Se se optar, por exemplo, pelas mulheres, existem assim 5 possibilidades e, escolhida uma mulher, existem 5 possibilidades para a escolha do homem. No total existem assim $5 \times 5 = 25$ maneiras diferentes para se formar um casal, o que confirma a sobrecontagem identificada na resposta do estudante.

5.1. Comece-se por observar que por $n \geq 1$, tem-se $0^n = 0$ e, por conseguinte,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^n.$$

Por outro lado, pela fórmula da extração e pela lei de Pascal, para quaisquer $n \geq k \geq 1$ tem-se, respetivamente,

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k}\left[\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}\right].$$

Estes dois factos combinados significam que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} k^n = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} k^{n-1} - n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n-1}{k} k^{n-1}.$$

Como $\binom{n-1}{n} = 0$, a última soma é ainda igual a

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \binom{n-1}{k} k^{n-1} = S_{n-1},$$

com o que fica provado o pretendido.

5.2. Case Base: $\mathbf{n = 1}$. Neste caso tem-se

$$S_1 = \sum_{k=0}^{1}(-1)^k \binom{1}{k} k = (-1)^1 \binom{1}{1} 1 = -1 = (-1)^1 1!,$$

o que prova o caso base.

Hipótese de indução: Fixado um $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, **qualquer**, suponhamos que

$$S_n = (-1)^n n!$$

Tese de indução:

$$S_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1)!$$

(Aqui, o n é o mesmo que se fixou na hipótese de indução.)

Passo de indução: Pela alínea 5.1,

$$S_{n+1} = -(n+1)S_n + (n+1)\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k \binom{n+1}{k} k^n. \tag{1}$$

Atendendo a que

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k \binom{N}{k} k^n = 0, \quad \forall\, N > n$$

em particular, para $N = n + 1$, conclui-se que a última soma em (1) é igual a 0. Donde, $S_{n+1} = -(n+1)S_n$. Logo, pela hipótese de indução,

$$S_{n+1} = -(n+1)S_n = -(n+1)(-1)^n n! = (-1)(-1)^n (n+1)! = (-1)^{n+1}(n+1)!$$

Conclusão: Pelo método de indução matemática, fica assim provado que

$$S_n = (-1)^n n!, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1. \tag{2}$$

5.3. Um caso não contemplado nas alíneas anteriores é S_0. Como $0^n = 0$ para $0 \neq n \in \mathbb{N}$ e $0^0 = 1$, neste caso tem-se

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{0}{k} k^0 = (-1)^0 \binom{0}{0} 0^0 = 1 = (-1)^0 0!$$

o que significa que a igualdade (2) é válida, mais geralmente, para $n \in \mathbb{N}$.

Assim, dados $n, m \in \mathbb{N}$, quaisquer, resulta da aplicação do binómio de Newton que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (m+k)^n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} m^{n-i} k^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} m^{n-i} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^i}_{(*)} . \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} k^m = 0, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}, \forall\, N > m,$$

tem-se que a soma $(*)$ é igual a

$$\begin{cases} 0, & \text{se } i < n \\ S_n, & \text{se } i = n \end{cases}$$

e, por conseguinte,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} m^{n-i} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^i = \binom{n}{n} m^{n-n} S_n = S_n = (-1)^n n!,$$

cf. observação no início.