Actividade Formativa 1

Exemplo de resolução

---

1. Sendo $X : \Omega \to E$ uma variável aleatória, em particular, X é uma aplicação mensurável, isto é, para cada $B \in \mathcal{E}$ verifica-se a condição

$$X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Deste modo, sendo P uma medida de probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{F})$, faz então sentido definir $P(X^{-1}(B))$ para $B \in \mathcal{E}$.

Seja então $P_X(B) := P(X^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{E}$. Como P é uma medida de probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{F})$, resulta directamente da definição de medida de probabilidade que

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \geq 0, \quad \forall\, B \in \mathcal{E}, \tag{1}$$

tendo-se, em particular para $B = E \in \mathcal{E}$,

$$P_X(E) = P(X^{-1}(E)) = P(\Omega) = 1. \tag{2}$$

Para se concluir o pretendido resta verificar que dada uma qualquer família B_n, $n \in \mathbb{N}$, de elementos de $\mathcal{E}$ tal que $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, tem-se

$$P_X\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_X(B_n). \tag{3}$$

Para esse efeito, note-se que

$$P_X\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right),$$

onde

$$X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n).$$

Para $i \neq j$, resulta de $B_i \cap B_j = \emptyset$ que $X^{-1}(B_i) \cap X^{-1}(B_j) = \emptyset$, pelo que

$$P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{P(X^{-1}(B_n))}_{:=P_X(B_n)},$$

em que a última igualdade resultou do facto de P ser uma medida de probabilidade (sobre $(\Omega, \mathcal{F})$). Verificadas as condições (1)–(3), podemos então concluir que P_X é uma medida de probabilidade sobre $(E, \mathcal{E})$.

2. Seja $\{X_t : t \geq 0\}$ um processo estocástico nas condições do enunciado.

2.1. Como, por hipótese, $\{X_t : t \geq 0\}$ tem incrementos independentes, tem-se que $X(0) = 0$. Deste modo, resulta da hipótese (ii) com $s = 0$ que cada variável aleatória $X(t) = X(t) - X(0)$, $t > 0$, tem distribuição normal de média

$$E[X(t)] = E[X(t) - X(0)] = \mu t$$

e variância

$$\begin{aligned} \operatorname{var}[X(t)] &= \operatorname{var}[X(t) - X(0)] \\ &= E[(X(t) - X(0))^2] - E^2[X(t) - X(0)] \\ &= \mu^2 t^2 + \sigma^2 t - \mu^2 t^2 = \sigma^2 t. \end{aligned}$$

Contudo, como para cada $t, h > 0$, tem-se $\operatorname{var}[X(t+h)] = \sigma^2(t+h)$ e $\operatorname{var}[X(t)] = \sigma^2 t$, com $\sigma \neq 0$, as variáveis aleatórias $X(t+h)$ e $X(t)$ não têm a mesma distribuição normal. Ou seja, $\{X_t : t \geq 0\}$ não é fortemente estacionário.

Para cada par $0 \leq s < t$ e cada $h > 0$, considerem-se as variáveis aleatórias $X(t+h) - X(s+h)$ e $X(t) - X(s)$, as quais, novamente por (ii), sabemos ter uma distribuição normal. Para se concluir que elas são identicamente distribuídas, basta então verificar que $X(t+h) - X(s+h)$ e $X(t) - X(s)$ têm a mesma média e a mesma variância. Com efeito, e ainda por (ii), tem-se

$$E[X(t+h) - X(s+h)] = \mu((t+h) - (s+h)) = \mu(t-s) = E[X(t) - X(s)]$$

e

$$\operatorname{var}[X(t+h) - X(s+h)] = \sigma^2(t-s) = \operatorname{var}[X(t) - X(s)],$$

o que permite concluir, pela arbitrariedade de $0 \leq s < t$ e $h > 0$ considerados, que o processo estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ tem incrementos estacionários.

2.2. Provado na alínea anterior que o processo estocástico a tempo contínuo $\{X_t : t \geq 0\}$ e de incrementos independentes (hipótese (i)) tem incrementos estacionários e que cada variável aleatória $X(t)$, $t > 0$, tem distribuição normal, resta observar que, sob a hipótese $\mu = 0$, tem-se $E[X(t)] = 0$ para todo o $t > 0$. Por definição, fica assim verificado que $\{X_t : t \geq 0\}$ é um processo de Wiener.

3. Dado que

$$(X(t+s) - X(t))^2 = X^2(t+s) - 2X(t+s)X(t) + X^2(t)$$

e, portanto,

$$X(t+s)X(t) = \frac{1}{2}\left(X^2(t+s) + X^2(t) - (X(t+s) - X(t))^2\right),$$

resulta da definição de movimento browniano e, portanto, directamente do exercício anterior (para $\mu = 0$ e $\sigma = 1$) que para quaisquer $t, s \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& E[X(t+s)X(t)] \\
= & \frac{1}{2}\left(E[X^2(t+s)] + E[X^2(t)] - E[(X(t+s) - X(t))^2]\right) \\
= & \frac{1}{2}\left(E[(X(t+s) - X(0))^2] + E[(X(t) - X(0))]^2 - E[(X(t+s) - X(t))^2]\right) \\
= & \frac{1}{2}\left((t+s) + t - ((t+s) - t)\right) = t.
\end{aligned}$$

4. Sendo $\{X_t : t \geq 0\}$ um processo de Wiener, $\{X_t : t \geq 0\}$ tem incrementos independentes e estacionários. Logo, e pela Propriedade 2 do manual, existe uma constante $\sigma \geq 0$ tal que $\mathrm{var}\,[X(t)] = \sigma^2 t$, para cada $t > 0$. Por outro lado, resulta ainda da definição de processo de Wiener que cada variável aleatória $X(t)$, $t > 0$, tem uma distribuição normal centrada, ou seja, de média nula. Estes aspectos conjugados permitem assim concluir que cada variável aleatória $X(t)$, $t > 0$, tem distribuição $N(0, \sigma^2 t)$. Em particular, $X(at)$, $a, t > 0$, tem distribuição $N(0, \sigma^2 at)$.

Para se concluir o pretendido, resta então verificar que $\sqrt{a}X(t)$, $t > 0$, tem também a distribuição $N(0, \sigma^2 at)$.

Para esse efeito, observe-se que o facto de cada $X(t)$, $t > 0$, ter distribuição $N(0, \sigma^2 t)$ significa, em termos de função característica, que

$$\begin{aligned}
\Phi_{X(t)}(u) := E\left[e^{iuX(t)}\right] &= \exp\left(iuE[X(t)] - \frac{1}{2}\mathrm{var}\,[X(t)]u^2\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 t\right).
\end{aligned}$$

Claramente, tem-se então

$$\Phi_{\sqrt{a}X(t)}(u) := E\left[e^{iu\sqrt{a}X(t)}\right] = \Phi_{X(t)}(\sqrt{a}u) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 a u^2 t\right),$$

de onde se conclui o pretendido, ou seja, $\sqrt{a}X(t)$ tem distribuição normal, centrada e de variância $\sigma^2 at$.

5. Um processo $\{X_t : t \in T\}$ é gaussiano se para todo o $n \in \mathbb{N}$ e qualquer subconjunto $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq T$, o vector aleatório $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ tem distribuição normal n-dimensional. Ou seja, e em termos de função característica,

$$\Phi_{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}}(u_1,\ldots,u_n) = \exp\left(i\sum_{k=1}^{n} E[X_{t_k}]u_k - \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n} \operatorname{cov}[X_{t_k},X_{t_j}]u_k u_j\right).$$

Assim, se $\{X_t : t \in T\}$ é estacionário em média e em covariâncias[1], i.e., se existirem uma constante $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$E[X_t] = \mu, \quad \forall\, t \in T$$

e uma função γ tal que

$$\operatorname{cov}[X_t, X_s] = \gamma(t-s), \quad \forall\, s,t \in T, s \leq t,$$

tem-se então

$$\begin{aligned}\Phi_{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}}(u_1,\ldots,u_n) &= \exp\left(i\sum_{k=1}^{n} \mu u_k - \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n} \gamma(t_k - t_j)u_k u_j\right) \\ &= \Phi_{X(t_1+h),\ldots,X(t_n+h)}(u_1,\ldots,u_n),\end{aligned}$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}$ e qualquer subconjunto $\{t_1,\ldots,t_n\} \subseteq T$ tal que $t_1 \leq \ldots \leq t_n$ e $t_i + h \in T$, $i = 1,\ldots,n$. Por outras palavras, o processo $\{X_t : t \in T\}$ é fortemente estacionário.

Este exercício justifica a afirmação feita em "Algumas Orientações Metodológicas" sobre a relevância da estacionaridade em média e em covariâncias no âmbito dos processos gaussianos.

[1]Estando aqui implicada a distribuição normal, X_t possui momentos de todas as ordens finitos.