Orientação de trabalho:

• Inicie o estudo do Tema 3: **Recorrências e Funções Geradoras**

Secção 3.1: *Relações de recorrência* - (pág 139 a 164.)

Nesta secção irá tomar contacto com o conceito de relação de recorrência. Para isso leia com atenção os exemplos 1 a 5 desta secção, com excepção do exemplo 4.

Muitos algoritmos são baseados em relações de recorrência e problemas combinatórios considerados difíceis, à primeira vista, podem ser resolvidos mais facilmente se escritos na forma de relações de recorrência.

A noção de recursão em matemática surge naturalmente em várias questões. Por exemplo no definição de factorial:

$$\begin{aligned} &0! = 1; \\ &n! = n(n-1)! \quad \text{se } n \geq 1 \end{aligned}$$

Outro exemplo é o da definição de número harmónico:

$$\begin{aligned} &H_1 = 1; \\ &H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n} \quad \text{se } n \geq 2 \end{aligned}$$

De grosso modo, uma relação de recorrência, para uma sucessão $a_0, a_1, a_2, ...$, é definida por um conjunto de igualdades contendo alguns valores iniciais para os primeiros termos $a_0, a_1, ..., a_k$ e uma final para indicar o termo geral em função dos termos anteriores. Isto significa que se quisermos saber o n-ésimo termo de uma sucessão dada por uma relação de recorrência, temos de calcular alguns termos anteriores, o que pode ser pouco prático. O objectivo é, pois, obtermos uma forma fechada para a relação de recorrência, ou seja uma solução que não dependa dos termos anteriores e somente de n. Neste tema iremos estudar alguns métodos para resolver relações de recorrência.

Relação de recorrência:

Dada uma sucessão $a_0, a_1, a_2, ...$ uma relação de recorrência ou recursiva, para a sucessão dada, é uma fórmula que relaciona cada termo a_n com os termos que o precedem $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$:

$$a_n = f(a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}), \quad n \geq k+1.$$

As condições iniciais para a relação de recorrência especificam os valores dos termos $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ para um índice k fixo.

O primeiro que estudamos para resolver uma recorrência é o método de diante para trás:

Método de diante para trás:

Suponhamos que temos uma fórmula de recorrência

$$a_n = f(a_0, a_1, ..., a_{n-1}), \quad n \geq k+1 \qquad (*)$$

e que está sujeita a k condições iniciais. Na igualdade (*) substituímos a_{n-1} por uma expressão do tipo (*) e depois a_{n-2} e assim sucessivamente até ao termo a_0, de modo a desaparecerem os termos da sucessão. Este método pressupõe alguma advinhação da forma geral. Assim a fórmula obtida deverá ser provada pelo método de indução matemática.

Ver, com cuidado, os exemplos 1 e 2 de aplicação.

• Rever o princípio de indução matemática - indução simples - e estudar o princípio de indução matemática - indução completa. Estudar os exemplos onde este método é usado e ler, com atenção, o anexo nas páginas 163 e 164.

• Resolva os exercícios propostos na Folha 8.

Competências a adquirir: saber

- identificar uma relação de recorrência;
- determinar os primeiros termos de uma relação de recorrência;
- aplicar o método de diante para trás;
- usar os princípios de indução matemática: indução simples e indução completa.

Relações de recorrência (secção 3.1)

1. Utilize o método de substituição de diante para trás para encontrar a solução da fórmula de recorrência

$$x_n = 2x_{n-1} + 1$$

que satisfaz a condição inicial $x_0 = 1$. Confirme o seu resultado por indução matemática.

2. Considere a sucessão $\langle a_n \rangle$ que é definida por $a_0 = 0$ e é solução da fórmula de recorrência

$$x_n = 2x_{n-1} + n, \quad n \geq 1.$$

Mostre que $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i (n-i)$ para todo o número natural n. Calcule esta soma.

3. Encontre a solução da seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} &x_1 = 3, \\ &x_n = x_{n-1} + 3n^2, \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

4. Considere a sucessão $\langle d_n \rangle$ definida por $d_0 = 1$ e por $d_n = nd_{n-1} + 1$, para $n \geq 1$.

(a) Mostre, por indução, que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(b) Obtenha a igualdade acima pelo método da substituição de diante para trás.

5. Considere a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} &x_0 = 1, \\ &x_n = \sum_{i=0}^{n-1} x_i, \quad \text{para } n \geq 1. \end{aligned}$$

(a) Calcule os primeiros termos desta sucessão e conjecture uma fórmula explícita para x_n.

(b) Verifique, por indução matemática, que a fórmula que conjecturou na alínea anterior está correcta.

6. Considere a sucessão dupla $\langle x_{n,k} \rangle_{n,k}$ definida por $x_{0,k} = 0$ e por

$$x_{n+1,k} = \begin{cases} x_{n,k} + 1, & \text{se } n \geq k, \\ 0, & \text{se } n < k. \end{cases}$$

Explicite esta sucessão: $x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}, ..., x_{n,k}$.

7. Mostre que

$$F_{n+1} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} 5^k$$

para todo o número natural n.

[*Sugestão:* Proceda à expansão da fórmula $F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+1} - \widehat{\Phi}^{n+1})$ e use o binómio de Newton.]

8. Mostre por indução que

$$F_{n+2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} F_k = 1 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n$$

para todo o número natural $n \geq 1$.

9. Considere a sucessão $\langle C_n \rangle$ definida por $C_1 = 0$ e por

$$C_n = C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1, \quad \text{para } n \geq 2.$$

(a) Mostre, por indução, que $C_{2^n} = n$.

(b) Mostre, por indução em n, que, se $2^n \leq k < 2^{n+1}$, então $C_k = n$.

(c) Usando o resultado da alínea anterior, demonstre que $C_n = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

10. Sabe-se que qualquer número natural não nulo se escreve de maneira única como soma de potências distintas de 2 (notação posicional binária). Dito de outro modo, dado $n \geq 1$, existe uma única sequência binária $b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0$ com $b_k = 1$ (não há zeros à esquerda!) tal que

$$n = \sum_{i=0}^{k} b_i 2^i = b_0 + b_1 2 + b_2 2^2 + \cdots + b_k 2^k.$$

Também se diz que a sequência $b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0$ é a EXPANSÃO BINÁRIA de n e escreve-se $n = (b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0)_2$.

(a) Para aquecer, mostre que, se $n = (b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0)_2$, onde $n > 1$, então $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = (b_k b_{k-1} \ldots b_2 b_1)_2$.

(b) Considere a sucessão $\langle C_n \rangle$ definida por $C_1 = 1$ e por

$$C_n = C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + n, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Mostre que, se $n = (b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0)_2$, então

$$C_n = \sum_{i=0}^{k} b_i (2^{i+1} - 1).$$

11. O número máximo de comparações M_n que o algoritmo *Quicksort* efectua para ordenar uma lista de n itens satisfaz a relação de recorrência

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_n &= n + 1 + \max_{1 \leq k \leq n-1} (x_k + x_{n-k}), \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Mostre que $M_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} - 3$, para todo o número natural $n \geq 1$.

1. $x_n = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \geq 0$.

2. $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i(n-i) = 2^{n+1} - n - 2$.

3. $x_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

5. Os primeiros termos da sucessão são $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 8, x_5 = 16$. Conjectura: $x_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2}\|n = 0\|$.

6. $x_{1,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \leq 0 \\ 0 & \text{se } k > 0 \end{cases}$, $x_{2,k} = \begin{cases} 2 & \text{se } k \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < k \leq 1 \\ 0 & \text{se } k > 1 \end{cases}$, $x_{3,k} = \begin{cases} 3 & \text{se } k \leq 0 \\ 2 & \text{se } 0 < k \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < k \leq 2 \\ 0 & \text{se } k > 2 \end{cases}$. No caso geral, temos $x_{n,k} = \begin{cases} n & \text{se } k \leq 0 \\ n-1 & \text{se } 0 < k \leq 1 \\ \vdots & \\ 1 & \text{se } n-2 < k \leq n-1 \\ 0 & \text{se } k > n-1 \end{cases}$.

1. Temos

$$\begin{aligned} x_n &= 2x_{n-1}+1 = 2(2x_{n-2}+1)+1 = 4x_{n-2}+2+1 = 4(2x_{n-3}+1)+2+1 \\ &= 8x_{n-3}+4+2+1 = \cdots = 2^k x_{n-k} + 2^{k-1} + \cdots + 2^1 + 2^0 = \cdots \\ &= 2^n x_0 + 2^{n-1} + \cdots + 2^1 + 2^0 = 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2^1 + 2^0 = 2^{n+1} - 1\,. \end{aligned}$$

Vamos verificar que $x_n = 2^{n+1} - 1$ por indução matemática. O caso base $n = 0$ vale porque ambos os membros dão 1. Vamos agora tratar do passo da indução:

$$x_{n+1} = 2x_n + 1 \underset{\text{hip. ind.}}{=} 2(2^{n+1}-1)+1 = 2^{n+2} - 2 + 1 = 2^{n+2} - 1\,.$$

Pelo método de indução matemática a fórmula está provada.

2. Consideremos a relação de recorrência definida por

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 2x_n + n + 1, \;\; n \geq 1$$

Demonstraremos por indução que $x_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i(n-i)$. A base da indução consiste na proposição

$$x_1 = \sum_{i=0}^{0} 2^i(1-i) \qquad \text{(Base de Indução)}$$

que é trivialmente verdadeira, pois ambos os membros da igualdade têm o valor 1. Admitindo

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i(n-i) \qquad \text{(Hipótese de Indução)}$$

provemos a

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} 2^i(n+1-i) \qquad \text{(Tese de Indução)}$$

Tem-se

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n + n + 1 = 2\sum_{i=0}^{n-1} 2^i(n-i) + n + 1 && \text{(por hip. de indução)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1}(n-i) + n + 1 = \sum_{j=1}^{n} 2^j(n+1-j) + n + 1 && \text{(mud. de var. j=i+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{n} 2^j(n+1-j) && \text{(fim da indução)} \end{aligned}$$

Vamos agora calcular este somatório. Para isso, usaremos o método da perturbação. Note-se que dispomos já de uma expressão para x_{n+1}, que nos vem da fórmula de recorrência.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n} 2^i(n+1-i) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i(n+1-i) + 2^n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(2^i(n-i) + 2^i\right) + 2^n \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i(n-i) + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 2^n = x_n + \frac{2^n-1}{2-1} + 2^n = x_n + 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Igualando as duas expressões que obtivemos para x_{n+1} obtemos

$$2x_n + n + 1 = x_n + 2^{n+1} - 1 \Leftrightarrow x_n = 2^{n+1} - n - 2$$

3. Aplicando o método da substituição de diante para trás à relação de recorrência

$$x_1 = 3, \quad x_{n+1} = x_n + 3(n+1)^2$$

obtemos

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + 3n^2 = x_{n-2} + 3(n-1)^2 + 3n^2 = \cdots = x_1 + 3 \times 2^2 + \cdots + 3n^2 \\ &= 3 + 3 \times 2^2 + \cdots + 3n^2 = \sum_{i=1}^{n} 3i^2 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 \underset{(*)}{=} 3\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \end{aligned}$$

(*) - ver ex. 7, p. 131.

4. (a) A base de indução é $d_0 = 0!\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!}$ e é trivialmente verdadeira. Admitindo, por hipótese de Indução que $d_n = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, provemos $d_{n+1} = (n+1)!\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}$ (tese de Indução). Tem-se

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= (n+1)d_n + 1 = (n+1)\left(n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) + 1 \qquad \text{(por hip. de indução)} \\ &= (n+1)!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + (n+1)!\frac{1}{(n+1)!} = (n+1)!\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) \\ &= (n+1)!\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

(b) Aplicando o método da substituição de diante para trás, temos

$$\begin{aligned} d_n &= nd_{n-1} + 1 = n((n-1)d_{n-2} + 1) + 1 = n(n-1)d_{n-2} + n + 1 \\ &= n^{\underline{2}}d_{n-2} + n^{\underline{1}} + n^{\underline{0}} = n^{\underline{2}}((n-2)d_{n-3} + 1) + n^{\underline{1}} + n^{\underline{0}} \\ &= n^{\underline{3}}d_{n-3} + n^{\underline{2}} + n^{\underline{1}} + n^{\underline{0}} = \cdots = n^{\underline{n}}d_0 + n^{\underline{n-1}} + \cdots + n^{\underline{2}} + n^{\underline{1}} + n^{\underline{0}} \\ &= n^{\underline{n}} + n^{\underline{n-1}} + \cdots + n^{\underline{2}} + n^{\underline{1}} + n^{\underline{0}} = \sum_{k=0}^{n} n^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

5. Os primeiros termos da sucessão são

$$x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 8, x_5 = 16, \ldots$$

É visível uma sucessão de potências de 2; mas a igualdade $x_n = 2^{n-1}$, que é aparentemente a regra para $n \geq 1$, não é válida no caso $n = 0$, pois daria para x_0 o valor $\frac{1}{2}$, em vez do valor correcto, 1. Podemos facilmente corrigir esta 'anomalia' recorrendo à notação de Iverson [1]:

$$x_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2}\|n = 0\|$$

É claro que é necessário provar a justeza da nossa conjectura, o que faremos por indução completa (dado que a recorrência é também completa: x_{n+1} depende não só de x_n mas de todos os termos precedentes). A base de indução consiste em $x_0 = 2^{-1} + \frac{1}{2}\|0 = 0\|$, que é trivialmente verdadeiro. Admitindo

$$\forall 0 \leq i \leq n \quad x_i = 2^{i-1} + \frac{1}{2}\|i = 0\| \qquad \text{(Hip. de Indução Completa)}$$

provemos que

$$x_{n+1} = 2^n + \frac{1}{2}\|n + 1 = 0\| = 2^n \qquad \text{(Tese de Indução (pq } n \geq 0\text{))}$$

Tem-se

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\underset{\text{def. da recor.}}{=} \sum_{i=0}^{n} x_i \underset{\text{hip. ind.}}{=} \sum_{i=0}^{n} \left(2^{i-1} + \frac{1}{2}\|i = 0\|\right) = \sum_{i=0}^{n} 2^{i-1} + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2}\|i = 0\| \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} 2^i + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} + \frac{1}{2} = 2^n. \end{aligned}$$

6. Por definição, temos para $n = 1$ que

$$x_{1,k} = \begin{cases} x_{0,k} + 1 & \text{se } k \leq 0 \\ 0 & \text{se } k > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 + 1 & \text{se } k \leq 0 \\ 0 & \text{se } k > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \leq 0 \\ 0 & \text{se } k > 0 \end{cases}.$$

Para $n = 2$,

$$x_{2,k} = \begin{cases} x_{1,k} + 1 & \text{se } k \leq 1 \\ 0 & \text{se } k > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 + 1 & \text{se } k \leq 0 \\ 0 + 1 & \text{se } 0 < k \leq 1 \\ 0 & \text{se } k > 1 \end{cases} = \begin{cases} 2 & \text{se } k \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < k \leq 1 \\ 0 & \text{se } k > 1 \end{cases}.$$

Para $n = 3$,

$$x_{3,k} = \begin{cases} x_{2,k} + 1 & \text{se } k \leq 2 \\ 0 & \text{se } k > 2 \end{cases} = \begin{cases} 3 & \text{se } k \leq 0 \\ 2 & \text{se } 0 < k \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < k \leq 2 \\ 0 & \text{se } k > 2 \end{cases}.$$

[1] A segunda parcela adiciona $\frac{1}{2}$ unicamente quando $n = 0$ e, portanto, obtemos o valor correcto para x_0 sem alterar os restantes termos da sucessão.

No caso geral, temos

$$x_{n,k} = \begin{cases} n & \text{se } k \leq 0 \\ n-1 & \text{se } 0 < k \leq 1 \\ \vdots & \\ 1 & \text{se } n-2 < k \leq n-1 \\ 0 & \text{se } k > n-1 \end{cases}$$

– o que pode ser provado pelo método de indução matemática. Verifique!

7. Sabemos que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\hat{\Phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+1} - \hat{\Phi}^{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}}\right] \\ &\underset{\text{bin. Newton}}{=} \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\left[\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}(\sqrt{5})^i - \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}(-1)^i(\sqrt{5})^i\right] \\ &= \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\left[(\sqrt{5})^i - (-1)^i(\sqrt{5})^i\right] \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=0, i \text{ ímpar}}^{n+1}\binom{n+1}{i}2(\sqrt{5})^{i-1} \end{aligned}$$

Agora fazemos a mudança de variável $i \mapsto 2k+1$. Assim, $i-1 = 2k$ e

$$i = 2k+1 \leq n+1 \iff 2k \leq n \iff k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Deste modo,

$$F_{n+1} = \frac{2}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n+1}{2k+1}(\sqrt{5})^{2k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n+1}{2k+1}5^k.$$

8. Para $n = 1$ temos $1 + F_1 = 2 = F_3$, e para $n = 2$ temos $1 + F_1 + F_2 = 1 + 1 + 1 = 3 = F_4$. Vamos agora mostrar o passo de indução (para $n \geq 2$):

$$\begin{aligned} F_{n+3} &\underset{(1)}{=} F_{n+2} + F_{n+1} \underset{(2)}{=} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} F_k\right) + \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} F_k\right) = \left(1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} F_k\right) + \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} F_k\right) \\ &\underset{(3)}{=} 3 + \sum_{k=1}^{n-1} F_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} F_k = 3 + \sum_{k=1}^{n-1}(F_{k+1} + F_k) \underset{(4)}{=} 3 + \sum_{k=1}^{n-1} F_{k+2} \\ &\underset{(5)}{=} 1 + 1 + 1 + \sum_{k=3}^{n+1} F_k = 1 + F_1 + F_2 + \sum_{k=3}^{n+1} F_k = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} F_k. \end{aligned}$$

(1), (4) - fórmula de recorrência para a sucessão de Fibonacci, (2) - hipótese de indução, (3) - mudança de variável $k \rightsquigarrow k+1$, (5) - mudança de variável $k \rightsquigarrow k-2$.

9. **(a)** Tem-se $C_{2^0} = 0$, por definição, pelo que a base de indução é trivialmente verdadeira. Admitindo como hipótese de indução $C_{2^n} = n$, tem-se $C_{2^{n+1}} = C_{\lfloor \frac{2^{n+1}}{2} \rfloor} + 1 = C_{2^n} + 1 = n + 1$.

(b) Se $2^0 \leq k < 2^{0+1}$, tem-se $k = 1$ e $C_k = 0$, verificando-se assim a base de indução. Admitamos então que

$$\text{Se } 2^n \leq k < 2^{n+1}, \text{ então } C_k = n \qquad \text{(Hip. de Ind.)}$$

Tomemos k tal que $2^{n+1} \leq k < 2^{n+2}$ e ponhamos $r = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Tem-se $2^n \leq r < 2^{n+1}$ e, portanto, por hipótese de indução, $C_r = n$. Daqui resulta imediatamente $C_k = C_r + 1 = n + 1$.

(c) Dado $n \in \mathbb{N}_1$, consideremos o único natural l tal que $2^l \leq n < 2^{l+1}$ (pela alínea anterior, $C_n = l$); tomando logaritmos, obtemos $l \leq \log_2 n < l + 1$. Esta desigualdade mostra que $l = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

11. Demonstraremos a igualdade $M_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3$ por *indução completa*. A base de indução ($M_1 = \frac{2\times 3}{2} - 3$) é trivialmente verdadeira. Admitindo

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ M_i = \frac{(i+1)(i+2)}{2} - 3 \qquad \text{(Hip. de Ind. Completa)}$$

Temos

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= n + 2 + \max\{M_k + M_{n+1-k} \colon 1 \leq k \leq n\} \\ &= n + 2 + \max\left\{\tfrac{(k+1)(k+2)}{2} - 3 + \tfrac{(n+1-k+1)(n+1-k+2)}{2} - 3 \colon 1 \leq k \leq n\right\} \\ &= n + 2 + \max\left\{\tfrac{n^2+5n+2+2k(k-(n+1))}{2} - 3 \colon 1 \leq k \leq n\right\} \end{aligned}$$

Ora o máximo acima é atingido quando $k = 1$ (e também, por simetria, quando $k = n + 1 - 1$) e, portanto [2]...

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= n + 2 + \frac{n^2 + 5n + 2 - 2n}{2} - 3 = n + 2 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3 \\ &= \frac{(n+2)(n+3)}{2} - 3 \qquad \text{(Fim da Indução)} \end{aligned}$$

[2]Estude a variação da função da variável *real* k definida no intervalo $[1, n]$ por $f(k) = 2k(k - (n + 1))$.