NÃO VALIDADA PELO REGENTE DA DISCIPLINA

Grupo I:

1- (a) V (porque 0 não é valor próprio de A, pois $P_A(0) \neq 0$)

(b) F ($\det A = P_A(0)$)

(c) F (porque $\det A = P_A(0)$, ou porque A é invertível)

(d) F (um polinómio de grau ímpar tem sempre zeros reais)

2- (a) V (porque $\dim T(\mathbb{R}^2) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$)

(b) F (porque $\dim T(\mathbb{R}^2) < \dim \mathbb{R}^3$)

(c) F ($T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = T\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$

(d) F (porque, atendendo a (b), não é sobrejectiva)

3- (a) F (porque $\det A = -\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix} = -1+1 = 0$, usando T. Laplace na 3ª linha)

(b) V (porque $\det(ABC) = \underbrace{(\det A)}_{0}(\det B)(\det C) = 0$)

(c)
(d) } (o enunciado não tem informação suficiente para garantir que são verdadeiras (e é possível encontrar contra-exemplos)

4- (a)
(b) } (o enunciado não tem informação suficiente para garantir que são verdadeiras (e é possível encontrar contra-exemplos)
(c)

(d) V (como E é um espaço linear, a soma de elementos de E será sempre um elemento de E)

Grupo II:

(a) V (se $a_{ij} = b_{ij} = 0$ para $i > j$ então $\sum_k a_{ik} b_{kj} = 0$ para $i > j$ pois,

para $i > j$, em $a_{ik} b_{kj}$ não podemos ter $i \leq k \leq j$ logo $a_{ik} = 0$ ou

$b_{kj} = 0$; ou seja, o produto de matrizes triangulares inferiores é uma matriz triangular inferior)

(b) F ($u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,1,0)$, $u_3 = (1,1,0)$ são linearmente independentes dois a dois, mas $u_3 = u_1 + u_2$)

Grupo III:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 - 4l_1]{l_2 + 3l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

O sistema é equivalente a um sistema que contém a equação $0 = 4$, ou seja, é impossível

Grupo IV:

(a) $$\underbrace{\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}}_{\det(A - \lambda I)} = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = \underbrace{(-1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1)}_{p_A(\lambda)} = -(\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

(b) $p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -1-\lambda = 0$ ou $\lambda + 1 = 0$ ou $\lambda - 1 = 0$, pelo que os valores próprios são $\lambda = -1$ (multiplicidade algébrica 2) e $\lambda = 1$ (com multiplicidade algébrica 1).

(c) $$(A - (-1)I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z \text{ qualquer} \end{cases}$$

O espaço próprio associado ao valor próprio -1 é $M_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$$(A-I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ z=0\end{cases}$$

O espaço próprio associado ao valor próprio 1 é $M_1 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle$

(d) A soma das multiplicidades geométricas é igual a 3, $\dim M_{-1} + \dim M_1 = 2+1=3$, logo a matriz 3×3 A é diagonalizável

(e) Basta escolher $P = \begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ (nas colunas estão vectores próprios linearmente independentes), para que

$AP = P\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, ou seja, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

<u>NOTA:</u> $A\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$,

que sabemos de (c) serem verdadeiras, garantem que

$$A\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

<u>Grupo V</u>: (a) $p(x^2) = \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

logo a primeira coluna é $\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

$p(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, logo a segunda coluna é $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$p(1) = p(0.x^2 + 0.x + 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, logo a terceira coluna é $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Assim a matriz de p em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$ e $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $p(ax^2+bx+c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a=b=c=0$, logo esse conjunto (núcleo da aplicação linear p) tem dimensão zero.

(c) Como as colunas da matriz de p (em relação às bases dadas) são linearmente independentes, tem-se $\dim \operatorname{Im} p = 3$

e $\operatorname{Im} p = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

formam uma base para $\operatorname{Im} p$

(d) $\underbrace{\dim \mathbb{R}_2[x]}_{3} = \underbrace{\dim \operatorname{Im} p}_{3} + \underbrace{\dim \operatorname{Nuc} p}_{0}$

(e) p é injectiva (porque $\dim \operatorname{Nuc} p = 0$) mas não é sobrejectiva (porque $\underbrace{\dim \operatorname{Im} p}_{3} < \underbrace{\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})}_{4}$).

Grupo VI :

Como A é 3×3 o polinómio característico de A terá pelo menos uma raiz real, ou seja, A terá pelo menos um valor próprio real: para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ tem-se $A\vec{v} = \alpha\vec{v}$.

ver Proposição 6.11

Mas então $A^2\vec{v} = A(A\vec{v}) = A(\alpha\vec{v}) = \alpha A\vec{v} = \alpha(\alpha\vec{v}) = \alpha^2\vec{v}$

$$(A^3 - A^2 + A - I_3)\vec{v} = (\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1)\vec{v}$$

Se $A^3 - A^2 + A - I_3 = 0$ então $(\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1)\vec{v} = \vec{0}$,

logo (pois $\vec{v} \neq \vec{0}$) $\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ e o único número real que verifica esta equação é $\alpha = 1$.