UNIDADE CURRICULAR: ANÁLISE DE FOURIER E APLICAÇÕES

CÓDIGO: 21161

DOCENTE: Catarina Nunes

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1. A função de densidade espectral (ou espectro de $Z_t, t \in Z$) é a transformada de Fourier de $\gamma(\tau)$:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) e^{-i\lambda\tau}, \quad -\infty \leq \lambda < \infty$$

com $e^{i\lambda} = cos(\lambda) + isen(\lambda)$ e onde $\gamma(\tau) = cov(Z_t, Z_{t+\tau})$ ou seja a função de autocovariância de Z_t.
Neste caso temos:

$$\gamma(\tau) = Me^{-\alpha|\tau|} cos(\beta\tau)$$

em que $M > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ e $-\infty < \tau < +\infty$. E portanto:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} M \; cos(\beta\tau) e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\lambda\tau}$$

Sendo $\gamma(\tau)$ uma função par, portanto e a sua transformada de fourier uma série de cossenos

$$= \frac{M}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} cos(\beta\tau) e^{-\alpha|\tau|} cos\lambda\tau$$

$$= \frac{M}{2\pi} \left[2 \sum_{\tau=1}^{\infty} cos(\beta\tau) e^{-\alpha\tau} cos\lambda\tau - 1 \right]$$

Nota: Se fosse assumido que se tratava de um processo contínuo $\{Z(t), t \in R\}$ estariamos a trabalhar com transformadas contínuas. E seria considerado correto.

2. Considere o processo

$$Z_t = a\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + b\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right) + W_t + 3W_{t-1}$$

em que a e b são variáveis aleatórias independentes com média zero e variância π; e $W_t \sim RB(0, \sigma^2)$ independentes entre si e independentes de a e b. Onde RB é ruído branco.

[2.1] Encontre a função de autocovariância de Z_t. Comecemos por calcular $\gamma(\tau) = cov(Z_t, Z_{t+\tau})$.

• se $\tau = 0$ temos:

$$\gamma(0) = var(Z_t) = var\left(a\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + b\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right) + W_t + 3W_{t-1}\right)$$

como a e b, são independentes e W_t é ruido branco, e portanto independentes e a variância da soma é a soma das variâncias.

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= var(a\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right)) + var(b\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right)) + var(W_t) + var(3W_{t-1}) \\ &= cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\pi + sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\pi + \sigma^2 + 9\sigma^2 \\ &= \pi + 10\sigma^2\end{aligned}$$

• se $\tau = 1$ temos:

$$\gamma(1) = cov(Z_t, Zt+1) = E\left[(Z_t - \mu_{Z_t})\left(Z_{t+1} - \mu_{Z_{t+1}}\right)\right]$$

mas $Z_{t+1} = acos\left(\frac{\pi}{3}\right) + bsen\left(\frac{\pi}{3}\right) + W_{t+1} + 3W_t$. Existem apenas 3 termos e, comum, a, b e uma ordem de ruido branco em comum entre Z_t e Z_{t+1}, W_t, o termos em $t-1$ e $t+1$ não aparece nas duas variáveis. Novamente estamos a trabalhar com ruido branco, e variáveis independentess de média zero e variância π e σ^2. Apenas vão aparecer três termos não nulos:

$$\begin{aligned}\gamma(1) = E\Big[\Big(a\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right) &+ b\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ +W_t + 3W_{t-1})\left(a\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + b\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right) + W_{t+1} + 3W_t\right)\Big] \\ &= \pi + 3\sigma^2\end{aligned}$$

• se $\tau = 2$ temos:

$$\gamma(2) = cov(Z_t, Zt+2)$$

mas $Z_{t+2} = a\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + b\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right) + W_{t+2} + 3W_{t+1}$. Existem apenas dois termos em comum entre Z_t e Z_{t+2}, a e b os outros termos não aparece nas duas variáveis. Novamente estamos a trabalhar com ruido branco, e variáveis independentess de média zero e variância π e σ^2. Apenas vão aparecer dois termos não nulos:

$$\gamma(2) = E\left[\left(a\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + b\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right) + W_t + 3W_{t-1}\right)\left(a\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + b\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right) + W_{t+2} + 3W_{t+1}\right)\right]$$
$$= \pi$$

Para ordens superiores a 2, o resultado é idêntico. Utilizando a propriedade que $\gamma(\tau) = \gamma(-\tau)$.
Temos então:

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} \pi + 10\sigma^2, & \tau = 0 \\ \pi + 3\sigma^2, & |\tau| = 1 \\ \pi, & |\tau| \geq 2 \end{cases}$$

[2.2] A função de autocovariância encontrada é absolutamente somável? Se a resposta for afirmativa, encontre a função de densidade espectral de Z_t.
A função de autocovariância encontrada não é absolutamente somável.

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \pi + 13\sigma^2$$

FIM