Geometria

Ana Luísa Correia e João Araújo

Lisboa
Novembro de 2010

1. Triângulos

Chama-se *triângulo* a um polígono determinado por três rectas que se cortam duas a duas en três pontos (que não se encontram alinhados). Os pontos de intersecção das rectas são os *vértices* e os segmentos de recta determinados são os *lados* do triângulo. Cada dois lados contíguos formam um ângulo interno do triângulo. Portanto, um triângulo tem:

3 ângulos (internos), 3 lados, 3 vértices.

Denotamos um triângulo pelo símbolo $\triangle$ seguido pelas letras dos seus vértices. Assim

$$\triangle ABC$$

denota o triângulo com

vértices nos pontos A, B, C;
lados nos segmentos $[AB]$, $[BC]$ e $[CA]$;
ângulos $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ([a]).

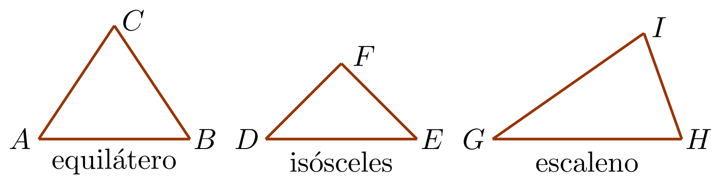
Claramente temos

$$\triangle ABC = \triangle ACB = \triangle BAC = \triangle BCA = \triangle CAB = \triangle CBA$$

pois os vértices, os lados e os ângulos são coincidentes.

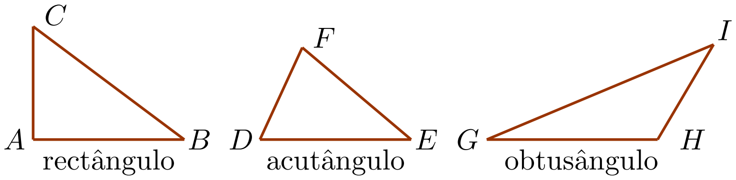
Os triângulos, quanto à grandeza relativa dos lados, classificam-se em:

Equiláteros	se têm os três lados iguais.
Isósceles	se têm dois lados iguais.
Escalenos	se têm os três lados desiguais.



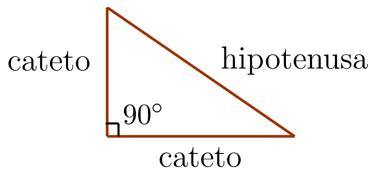
Os triângulos, quanto à natureza dos seus ângulos classificam-se em:

Rectângulos	se têm um ângulo recto.
Acutângulos	se têm todos os ângulos agudos.
Obtusângulos	se têm um ângulo obtuso.



[a]Note que $\angle A = \angle BAC = \angle CAB$ é o ângulo com vértice no ponto A e lados nas semi-rectas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Num triângulo rectângulo:



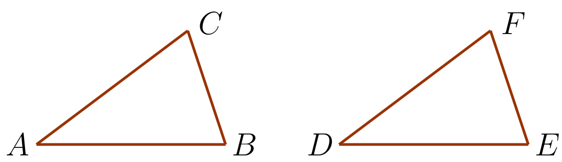
o lado oposto ao ângulo recto chama-se *hipotenusa*, e é o maior lado do triângulo. Os outros dois lados chamam-se *catetos*.

A soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$. Assim um triângulo tem no máximo um ângulo recto ou um ângulo obtuso.

O conceito de igualdade nos triângulos pode ser estendido do modo seguinte.

Triângulos iguais ou congruentes:

- Dois triângulos dizem-se *iguais* ou *congruentes* se coincidem ou se deslocando um deles se pode fazer coincidir com o outro.



Em dois triângulos iguais, a cada elemento de um corresponde no outro um elemento igual. Os elementos iguais dizem-se *correspondentes* ou *homólogos*. Esses elementos são lados ou ângulos. Desta forma, sendo $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ temos

$$\begin{aligned}&[AB] = [DE]\,,\ [BC] = [EF]\,,\ [AC] = [DF]\\&\angle A = \angle D\,,\ \angle B = \angle E\,,\ \angle C = \angle F\end{aligned}$$

Observação 1. Para a congruência de triângulos é importante a ordem com que escrevemos os vértices. Embora $\triangle ABC = \triangle BCA$, ao escrevermos $\triangle ABC \equiv \triangle BCA$ estamos a afirmar que

$$\begin{aligned}&[AB] = [BC]\,,\ [BC] = [CA]\,,\ [AC] = [BA]\,,\ \text{ e}\\&\angle A = \angle B\,,\ \angle B = \angle C\,,\ \angle C = \angle A\,,\end{aligned}$$

ou seja que o $\triangle ABC$ é equilátero.

Observação 2. Resulta da definição de congruência de triângulos que:

a) Em triângulos iguais, a lados iguais opõem-se ângulos iguais.

b) Em triângulos iguais, ângulos iguais opõem-se lados iguais.

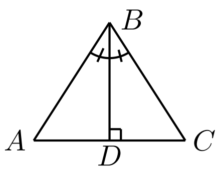
Como vimos, dois triângulos iguais têm os três lados e os três ângulos iguais. Os casos de igualdade de triângulos afirmam que basta sabermos que três determinados elementos de cada um deles são iguais, para termos a garantia que os outros três também o são.

Casos de igualdade/congruência de triângulos:

caso ALA	Dois triângulos são iguais se tiverem um lado igual e os dois ângulos adjacentes iguais, cada um a cada um, isto é: se $\angle A = \angle D$, $AB = DE$, $\angle B = \angle E$ então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$
caso LAL	Dois triângulos são iguais se tiverem dois lados iguais, cada um a cada um, e o ângulo por eles formado igual, isto é: se $AC = DF$, $\angle A = \angle D$, $AB = DE$ então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$
caso LLL	Dois triângulos são iguais se tiverem os três lados iguais, cada um a cada um, isto é: se $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$ então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

Estes resultados são provados num curso básico de Geometria.

Aplicação 1. Considere a figura abaixo



Se $\angle ABD = \angle CBD$ e $\angle BDC$ é recto então $\triangle ABC$ é isósceles.

Resolução. Consideremos os triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle CDB$. Como $\angle BDC$ é recto também, $\angle BDA$ é recto porque são ângulos suplementares (soma igual a um ângulo raso). Portanto temos

$$\angle ABD = \angle CBD\,,\ [BD] = [BD]\,,\ \angle BDA = \angle BDC$$

e, pelo caso ALA podemos concluir que $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$. Da congruência, resulta que são iguais todos os lados correspondentes. Logo temos $[AB] = [CB]$, o que prova que $\triangle ABC$ é isósceles.

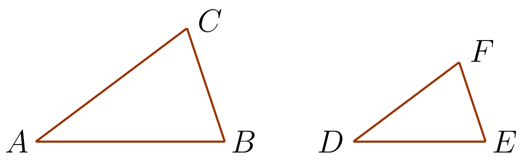
Exercício 1.

a) Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ tais que $[AC] = [DF]$ e $\angle C = \angle F$. Indique, se possível, outra condição para garantir que $\triangle ABC = \triangle DEF$.

b) Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos equiláteros. Justifique que se $[AB] = [DE]$ então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Triângulos semelhantes:

- Dois triângulos dizem-se *semelhantes* quando têm os ângulos respectivamente iguais e os lados correspondentes proporcionais.



Para designarmos que $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são semelhantes escrevemos $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ e, portanto, temos

$$\angle A = \angle D\,,\ \angle B = \angle E\,,\ \angle C = \angle F \quad , \quad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

($Nota:$ AB é a medida do segmento $[AB]$. Igual para os outro segmentos.)

- O valor comum $k = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ diz-se a *razão de semelhança* entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$.

Tal como na congruência de triângulos temos as observações seguintes:

Observação 3.

a) Para a semelhança de triângulos é importante a ordem com que escrevemos os vértices.

b) Em triângulos semelhantes, a lados correspondentes proporcionais opõem-se ângulos iguais.

c) Em triângulos semelhantes, ângulos iguais opõem-se lados correspondentes proporcionais.

Aplicação 2. É claro da definição de semelhança de triângulos que: Se $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ com razão de semelhança $k = 1$, então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Resolução. Se $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ com razão de semelhança $k = 1$, então temos

$$\angle A = \angle D\,,\ \angle B = \angle E\,,\ \angle C = \angle F \quad , \quad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = 1.$$

Portanto, para os lados, temos

$$[AB] = [DE]\ ,\ [BC] = [EF]\ ,\ [AC] = [DF]$$

o que justifica que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Aplicação 3. A razão dos perímetros de dois triângulos semelhantes é igual à razão de semelhança. Quer dizer que se $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ com razão de semelhança k e $p_{\triangle ABC}$, $p_{\triangle DEF}$ são os perímetros de $\triangle ABC$ e de $\triangle DEF$, respectivamente, então $\frac{p_{\triangle ABC}}{p_{\triangle DEF}} = k$.

Resolução. Como $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ com razão de semelhança k, então temos

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k.$$

Quer dizer que

$$AB = kDE\,,\ BC = kEF\,,\ AC = kDF.$$

Por definição o perímetro é a soma das medidas dos lados de um triângulo. Logo

$$p_{\triangle ABC} = AB + BC + AC \quad , \quad p_{\triangle DEF} = DE + EF + DF.$$

Portanto, temos

$$\frac{p_{\triangle ABC}}{p_{\triangle DEF}} = \frac{AB + BC + AC}{DE + EF + DF} = \frac{kDE + kEF + kDF}{DE + EF + DF} = k$$

como queríamos.

Exercício 2.

a) No $\triangle ABC$, temos $AB = 20$cm, $BC = 12$cm e $AC = 25$cm. Quanto mede cada um dos lados de um triângulo semelhante ao dado, mas maior sendo a razão de semelhança $k = 6/5$.

b) Num triângulo os lados medem 15cm, 20cm e 25cm; noutro triângulo semelhante o maior lado mede 35cm. Determine a medida de cada um dos dois lados deste último triângulo e a razão de semelhança do triângulo maior para o mais pequeno.

c) O perímetro de um triângulo é 18cm e dois dos lados de outro semelhante medem 4cm e 5cm. Sendo a razão de semelhança do primeiro triângulo para o segundo igual a $3/2$, determine a medida do outro lado deste último triângulo.

d) Os perímetros de dois triângulos isósceles semelhantes são 22cm e 33cm. Determine a medida de cada um dos lados do triângulo maior, sabendo que a base do menor mede 6cm.

e) A razão de semelhança de dois triângulos isósceles é $3/5$, medindo a base do menor 6cm e um dos lados iguais do maior 15cm. Determine o perímetro de cada um dos triângulos.

Por definição, se dois triângulos iguais têm os três ângulos iguais, cada um a cada um, e os lados correspondentes directamente proporcionais, são semelhantes. Os casos de semelhança de triângulos afirmam que basta conhecermos apenas algumas daquelas condições, para termos a garantia que dois triângulos são semelhantes.

Casos de semelhança de triângulos:

caso AA	Dois triângulos são semelhantes se tiverem dois ângulos iguais, isto é: se $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
caso LLL$_{sem}$	Dois triângulos são semelhantes se tiverem os três lados proporcionais, isto é: se $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
caso LAL$_{sem}$	Dois triângulos são semelhantes se tiverem dois lados proporcionais e o ângulo por eles formado igual, isto é: se $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ e $\angle B = \angle E$ então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

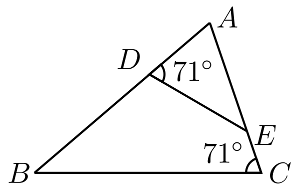
Estes resultados são consequência do conhecido Teorema de Thales.

Exercício 3.

a) No $\triangle ABC$ temos $\measuredangle B = 75°$ e $\measuredangle C = 45°$. No $\triangle DEF$ temos $\measuredangle D = 45°$. Quanto devem medir os ângulos $\angle E$ e $\angle F$ para que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

b) É possível que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ se $\measuredangle A = 89°$ e $\measuredangle D = 95°$? Justifique a resposta.

c) Considere a figura e suponha que $AD = 8$, $AE = 10$, $EC = 6$, $BC = 18$.



Justifique que $\triangle ADE \sim \triangle ACB$. Determine DE e AB.

d) No $\triangle ABC$, temos $AB = 9$cm, $BC = 15$cm e $AC = 21$cm, e no $\triangle DEF$ o lado menor mede 12cm. Determine as medidas dos lados de $\triangle DEF$ de modo a que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

e) No $\triangle ABC$, temos $\measuredangle B = 67,5°$, $AB = 12$cm e $BC = 8$cm. No $\triangle DEF$, temos $\measuredangle F = 75°$, $DF = 6$cm e $EF = 9$cm. Justifique que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Determine todas as medidas de ângulos e lados desconhecidas.