ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Período de Realização

Decorre de 3 a 13 de janeiro de 2020

Data de Limite de Entrega

13 de janeiro de 2020, até às 23h55 de Portugal Continental

Conteúdos

Espaços Vetoriais. Aplicações Lineares. Valores e Vetores Próprios.

Competências

Identificar as principais técnicas, metodologias e ferramentas da Álgebra Linear; Aplicar técnicas de Álgebra Linear para modelar e resolver problemas, nomeadamente saber utilizar matrizes, determinantes, valores e vetores próprios.

Trabalho a desenvolver

Recursos

Manual da UC.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

- O primeiro grupo contem questões de escolha múltipla, cuja resposta não necessita de justificação.

A cotação total deste e-fólio é de 4 valores.
Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0.25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores.
A classificação dos restantes Grupos é a seguinte

II.	III.	IV.	V.
0.5	1	1	0.5

.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Caso não realize o seu E-fólio por escrito mas num outro formato, preencha igualmente o cabeçalho da Folha de Resolução e declare nela que terminou o seu trabalho até à data e hora determinada pelo professor.

O documento final deverá estar em *formato pdf*.

Todas as páginas do *documento em pdf* devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 10 páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 0000000efolioB.pdf

Deve carregar o referido ficheiro *em formato pdf* para a plataforma no dispositivo E-fólio B até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro *em formato pdf* a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Rafael Sasportes

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla *apenas uma* das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

1. Seja A uma matriz 2×2 com valores próprios α e β.

Então

- ☐ **a)** $\det A = \alpha - \beta$.
- ☐ **b)** $\det A = \alpha + \beta$.
- ☐ **c)** $\det A = \det(A^{-1})$.
- ☐ **d)** $A^2 = (\text{tr } A)A - (\alpha\beta)I_2$.

2. Considere F e G subespaços lineares de $\mathbb{R}^5$ tais que $\dim F = 3$ e $\dim G = 3$.

Então

- ☐ **a)** $\dim(F \cap G) = 1$.
- ☐ **b)** $\dim(F \cap G) = 2$.
- ☐ **c)** Existe w não nulo tal que $w \in F \cap G$.
- ☐ **d)** Não existe w não nulo tal que $w \in F \cap G$.

3. Seja $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear e $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ a sua matriz em relação a uma base $\mathscr{B}$.

Então

- ☐ **a)** Nuc $h = (0,0,0)$.
- ☐ **b)** Im $h = \mathbb{R}^3$.
- ☐ **c)** $\dim$ Nuc $h = 1$.
- ☐ **d)** $\dim$ Im $h = 1$.

4. Sejam u, v e w vetores linearmente dependentes de um espaço linear E.

Então

- ☐ **a)** u e v são linearmente independentes.
- ☐ **b)** u e v são linearmente dependentes.
- ☐ **c)** $u, u+v$ e $u+w$ são linearmente independentes.
- ☐ **d)** $u, u+v$ e $u+w$ são linearmente dependentes.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa a afirmação seguinte, *justificando cuidadosamente* a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

Toda a matriz quadrada é soma de duas matrizes invertíveis.

III. Seja F o subconjunto de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ das matrizes hemi-simétricas (ou seja tais que $A = -A^\top$).

i) Mostre que F é um subespaço de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

ii) Determine a dimensão de F.

iii) Determine uma base $\mathcal{B}$ de F.

iv) Seja $T : F \to \mathbb{R}^3$ a aplicação que faz corresponder a cada matriz $A = (a_{ij})$ de F o vetor $(a_{12} + a_{13}, a_{13} + a_{23}, a_{23})$ de $\mathbb{R}^3$.
Determine a matriz que representa T em relação à base da alínea anterior e à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

v) Determine se T é injetiva.

vi) Determine se T é sobrejetiva.

vii) Verifique que T satisfaz o teorema da Dimensão, ou seja que $\dim F = \dim \text{Nuc } T + \dim \text{Im } T$.

IV. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$f(x, y, z) = (y - z, x + y, x + 2y - z).$$

i) Determine a matriz A que representa f em relação à base canónica no espaço de partida e de chegada.

ii) Mostre que a sequência $\mathcal{B}_1 = ((1,-1,-1),(0,1,1),(0,0,1))$ forma uma base de $\mathbb{R}^3$, e escreva a matriz S de mudança de base da base canónica para $\mathcal{B}_1$.

iii) Determine os valores próprios da matriz A.

iv) Deterrmine os espaços próprios associados aos valores próprios da matriz A.

V. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $C = AB$ e $D = BA$.

i) Seja $\lambda \neq 0$.
Mostre que λ é valor próprio de C se e só se λ é valor próprio de D.

ii) Mostre que C é invertível se e só se D é invertível.

FIM