e-Fólio B

Nome: ....

B.I./C.C.: .... **Nº de Estudante:** ....

Licenciatura: .... **Turma:** ....

Unidade Curricular: Álgebra Linear I **Código:** 21002

Data: .... **Ano Letivo:** 2013/2014

Docente: Rafael Sasportes **Classificação:** ....

Para a resolução do **e-Fólio B**, aconselha-se que:

- Preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-Fólio é composto por 5 grupos de questões, num total de 3 páginas e termina com a palavra FIM. As *suas respostas* às questões deste e-Fólio não podem ultrapassar **nove** páginas A4; páginas adicionais não serão classificadas.
- Escreva sempre com letra legível ou usando um processador de texto matemático conveniente.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um único documento digital (em formato *pdf*), incluindo obrigatoriamente esta folha de rosto e a página com as questões de escolha múltipla, e insira-o, na página moodle da sua turma, em "e-Fólio B" até ao dia 26 de janeiro.

Critérios de avaliação e cotação:

- A cotação total deste e-Fólio é de **4 valores**.
- Exceto nas questões de escolha múltipla, justifique *cuidadosa e detalhadamente* todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.
- Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0.25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores. Os Grupos II e III têm a cotação de 1 valor cada. Os Grupos IV e V têm a cotação de 0.5 valores cada.

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

1. Seja A uma matriz 4×4 com apenas dois valores próprios μ_1 e μ_2. Suponha ainda que os seus valores próprios têm multiplicidades algébricas iguais e que $\mu_1\mu_2 = 10$. Então:

☐ **a)** O polinómio característico de A pode ser $p(\mu) = (\mu - 2)(\mu - 5)$.
☐ **b)** O determinante de A é igual a 10.
☐ **c)** Qualquer dos espaços próprios de A tem dimensão 1.
☐ **d)** Os valores próprios de A podem ter multiplicidades geométricas diferentes.

2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = A^\top$. Considere a base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

A matriz $M = (T; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ que representa T nesta base é:

☐ **a)** $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

☐ **c)** $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

☐ **b)** $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

☐ **d)** $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Considere em $\mathbb{R}^3$ a seguinte sequência:

$$\mathcal{H} = \{(-1, 1, -1), (1, 1, 1), (0, 0, 0), (1, \sqrt{2}, \pi)\}.$$

Então:

☐ **a)** $\dim(\langle(-1, 1, -1), (1, 1, 1), (0, 0, 0), (1, \sqrt{2}, \pi)\rangle) = 4$.
☐ **b)** $\mathcal{H}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
☐ **c)** $\mathcal{H}$ é uma sequência geradora linearmente independente.
☐ **d)** $\langle(-1, 1, -1), (1, 1, 1), (0, 0, 0), (1, \sqrt{2}, \pi)\rangle = \mathbb{R}^3$.

4. Considere em $\mathbb{R}_3[x]$ a base $(1, x, x^2, x^3)$ e a aplicação linear de $\mathbb{R}_3[x]$ em $\mathbb{R}_3[x]$ definida por $g(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0$. Nessa base tem-se:

☐ **a)** $\operatorname{Nuc} g = \mathbb{R}_3[x]$ e $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}_3[x]$.
☐ **b)** $\operatorname{Nuc} g = \{0\}$ e $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}_3[x]$.
☐ **c)** $\operatorname{Nuc} g = \varnothing$ e $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}_3[x]$.
☐ **d)** $\dim(\operatorname{Nuc} g) = 3$ e $\dim(\operatorname{Im} g) = 1$.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Considere em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{M} = ((-1,0,1),(0,1,1),(1,-1,0))$ e uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

quando se considera no espaço de partida a base $\mathcal{M}$ e no espaço de chegada a base canónica.

Determine a matriz que representa T quando se considera no espaço de partida a base canónica e no espaço de chegada a base canónica.

III. Considere a transformação linear $S : \mathbb{R}_3[x] \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$S(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Considere em $\mathbb{R}_3[x]$ a base $\mathcal{P} = (x^3, x^2, x, 1)$ e em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a base

$$\mathcal{N} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

a) Determine a matriz A que representa S em relação às bases $\mathcal{P}$ e $\mathcal{N}$.

b) Calcule os valores próprios de A.

c) Calcule os espaços próprios associados aos valores próprios que determinou na alínea anterior.

d) Determine a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica dos valores próprios de A.

e) Determine em $\mathbb{R}_3[x]$, se possível, uma base constituida por vetores próprios.

IV. Considere uma aplicação linear $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Será possível que ℓ satisfaça $\operatorname{Nuc} \ell = \operatorname{Im} \ell$?

Em caso afirmativo dê um exemplo.

V. **a)** Seja A uma matriz 2×2 com característica 1. Sabendo que existe um vetor não nulo u, tal que $Au + 4u = 0$, determine o polinómio característico de A.

b) Dê um exemplo de uma matriz A não triangular satisfazendo as condições da alínea **a)**.

FIM