U.C. 21082
Matemática Finita

16 de junho de 2014

Critérios de avaliação

Questões de Escolha Múltipla:

- Na prova de **Exame**, cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores.

- No **P-fólio**, cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões de escolha múltipla é de 0 valores.

Restantes Questões:

- Para a correcção destas questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.

- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efectuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.

- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.

- Serão penalizados raciocínios contraditórios. De acordo com o grau de gravidade serão ainda penalizadas afirmações erradas.

Correcção Sumária

Nas páginas seguintes, a sugestão de uma sequência de resolução para uma determinada questão deve ser interpretada como uma das sequências possíveis. Será atribuída cotação análoga se, em alternativa, for apresentada outra, igualmente correcta.

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

Exame: Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

1.	**2.**	**3.**	**4.**
c)	**b)**	**a)**	**d)**

P-fólio: Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

1.	**2.**	**3.**
c)	**b)**	**a)**

5. (**Exame**: 6.0 valores)

5.1. (**Exame e P-fólio**[1]: 1.50 valores)
Feita a decomposição em números primos tem-se

$$600 = 2^3 \times 3^1 \times 5^2. \tag{1}$$

Logo, um número natural m é divisor de 600 se, e só se, m é da forma $m = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$ para $\alpha \in \{0,1,2,3\}$, $\beta \in \{0,1\}$, $\gamma \in \{0,1,2\}$. Isto é equivalente ao número de elementos da forma (α, β, γ) tal que $\alpha \in \{0,1,2,3\}$, $\beta \in \{0,1\}$, $\gamma \in \{0,1,2\}$, o qual é igual a

$$\#(\{0,1,2,3\}) \times \#(\{0,1\}) \times \#(\{0,1,2\}) = 24.$$

5.2. (**Exame**: 1.50 valores)
Um múltiplo de 3 é um número da forma $3k$, $k \in \{1,2,\ldots\}$. Este facto conjugado com a factorização (1) significa que procuramos o número de elementos da forma

$$600 = 3(2^\alpha \times 5^\gamma), \quad \alpha \in \{0,1,2,3\}, \gamma \in \{0,1,2\},$$

o qual é igual a $\#(\{0,1,2,3\}) \times \#(\{0,1,2\}) = 12$.

5.3.1. (**Exame**: 1.50 valores)
Um número é divisível por 3 se, e só se, é da forma $3k$, $k \in \mathbb{N}$. Logo, procura-se o número de elementos $k \in \{1,2,\ldots\}$ tais que

$$3 \leq 3k \leq 600,$$

que é equivalente a $1 \leq k \leq 200$. Existem, assim, 200 números entre 1 e 600, inclusivé, que são divisíveis por 3.

[1]Pergunta 4 do P-fólio.

5.3.2. (**Exame**: 1.50 valores)

Considerem-se os conjuntos

$$A = \{n \in [600] : n \text{ é divisível por } 3\}, B = \{n \in [600] : n \text{ é divisível por } 5\}.$$

Pretende-se determinar $\#(A \cup B)$.

Pela alínea anterior, tem-se que $\#A = 200$ e um raciocínio semelhante ao realizado nessa alínea permite concluir que $\#B = 120$. Como $A \cap B \neq \emptyset$, há que calcular o número de elementos do conjunto $A \cap B$, ou seja, o número de naturais entre 1 e 600 que são divisíveis por 3 e por 5. Isto corresponde a determinar o número de elementos k que são divisíveis por 15, isto é, da forma

$$15 \leq 15k \leq 600 \iff 1 \leq k \leq 40.$$

Pelo princípio da inclusão/exclusão tem-se então

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B) = 200 + 120 - 40 = 280.$$

6. (**Exame**: 2.0 valores; **P-fólio**: 1.50 valores[2])

Case Base: $\mathbf{n = 0}$. Neste caso tem-se

$$0^0 = 1 = 0!,$$

o que prova que o caso base verifica-se.

Hipótese de indução: Dado $n \geq 0$, **qualquer**, suponhamos que

$$n^n \geq n!.$$

Para $n+1$ tem-se então $(n+1)! = (n+1)n!$ em que, pela hipótese de indução, $n! \leq n^n$. Assim,

$$(n+1)! = (n+1)n! \leq (n+1)n^n \leq (n+1)(n+1)^n = (n+1)^{n+1},$$

onde se utilizou o facto de $n < n+1$ implicar $n^n \leq (n+1)^n$.

Pelo método de indução matemática, podemos assim concluir que, para qualquer número natural $n \in \mathbb{N}$ é válida a desigualdade $n^n \geq n!$.

7. (**Exame**: 4.50 valores)

7.1. (**Exame e P-fólio**[3]: 1.0 valor)

Para qualquer $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}\left[\frac{(k+6)!}{(k+1)!} - \frac{(k+5)!}{k!}\right] = \frac{1}{5}\frac{(k+5)!}{k!}\left[\frac{k+6}{k+1} - 1\right] &= \frac{1}{5}\frac{(k+5)!}{k!}\frac{k+6-k-1}{k+1} \\
&= \frac{(k+5)!}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

[2]Pergunta 5 do P-fólio.

[3]Pergunta 6.1 do P-fólio.

7.2. (**Exame e P-fólio**[4]: 1.50 valores)

Da alínea anterior resulta por aplicação directa do método telescópico que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+5)!}{(k+1)!} &= \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\left(\underbrace{\frac{(k+6)!}{(k+1)!}}_{=a_{k+1}} - \underbrace{\frac{(k+5)!}{k!}}_{:=a_k}\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(a_{n+1}-a_0\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{((n+1)+5)!}{(n+1)!} - \frac{(0+5)!}{0!}\right)\\
&= \frac{(n+6)!}{5(n+1)!} - 4!.
\end{aligned}$$

7.3. (**Exame**: 2.0 valores)

Note-se que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k+4}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{k+4}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{(k-1)+5}{(k-1)+1},$$

em que por uma mudança de variável, $i = k-1$, a última soma é igual a

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{i+5}{i+1} = \frac{1}{4!}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(i+5)!}{(i+1)!}.$$

Atendendo à alínea anterior, tem-se então

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(i+5)!}{(i+1)!} = \frac{((n-1)+6)!}{5((n-1)+1)!} - 4!$$

e, portanto,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k+4}{k} = 1 + \frac{(n+5)!}{5!n!} - 1 = \binom{n+5}{n}.$$

8. (**Exame e P-fólio**[5]: 3.50 valores)

8.1. (**Exame e P-fólio**: 1.50 valores)

Dada a relação de recorrência

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2},$$

o polinómio caracterítico correspondente é igual a

$$p(t) = t^2 - 3t + 2.$$

[4] Pergunta 6.2 do P-fólio.

[5] Grupo 7 do P-fólio.

Sendo as raízes de p iguais a 1 e a 2, tem-se então que cada termo a_n da solução geral é igual a

$$a_n = \alpha + \beta 2^n$$

para

$$\alpha + \beta = a_0 = 2, \quad \alpha + 2\beta = a_1 = 3,$$

ou seja, para $\alpha = \beta = 1$.

8.2. (**Exame e P-fólio**: 2.0 valores)

Dada a soma

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} a_i$$

tem-se

$$a_{n+1} + S_n = S_{n+1} = a_0 + a_1 + \sum_{i=2}^{n+1} a_i = 5 + \sum_{i=2}^{n+1} a_i = 5 + 3\sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1} - 2\sum_{i=2}^{n+1} a_{i-2},$$

onde se usou o facto de $a_i = 3a_{i-1} - 2a_{i-2}$ para $i \geq 2$. Mediante as mudanças de variável $j = i - 1$ e $k = i - 2$, resulta que a útima expressão é igual a

$$5 + 3\sum_{j=1}^{n} a_j - 2\sum_{k=0}^{n-1} a_k = 5 - 3a_0 + 3\sum_{j=0}^{n} a_j - 2\sum_{k=0}^{n} a_k + 2a_n = -1 + S_n + 2a_n.$$

Ou seja,

$$a_{n+1} + S_n = -1 + S_n + 2a_n,$$

pelo que $a_{n+1} = -1 + 2a_n$.