UNIVERSIDADE ABERTA

www.uab.pt

Atividade Formativa 2

Proposta de Resolução

1.1. Uma vez que $\lim_n 1/n = 0$ e f é contínua no ponto 0, tem-se

$$\lim_n f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\lim_n \frac{1}{n}\right) = f(0).$$

Como, por hipótese, $f(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, podemos então concluir que

$$f(0) = \lim_n f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

1.2. De $\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$ e da continuidade de f em 0 resulta que

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\right) = f(0),$$

pelo que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \times f(0) = 0.$$

2.1. Se $f(0) = 0$, então $a = 0$ verifica $f(a) = a$. Do mesmo modo, se $f(1) = 1$, $a = 1$ satisfaz $f(a) = a$.

A situação contrária às duas anteriores é o caso $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$. Neste caso considere-se a função $g(x) := f(x) - x$, que ainda é contínua em $[0, 1]$, por ser a diferença de duas funções contínuas em $[0, 1]$. Tem-se $g(0) = f(0) > 0$ e $g(1) = f(1) - 1 < 0$, o que pelo Teorema de Bolzano (pág. 246) permite concluir a existência de um ponto $a \in]0, 1[$ tal que $g(a) = 0$. Ou seja e pela definição da função g, $f(a) = a$.

2.2. Não há garantia da unicidade do ponto a. Por exemplo, para a função contínua $f(x) = 1-x$, há apenas um único ponto, $a = 1/2$, que satisfaz a condição do enunciado. Mas para a função $f(x) = x$, todos os pontos do intervalo $[0, 1]$ verificam a condição do enunciado.

3.1. Seja $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Trata-se de uma função polinomial e, por conseguinte, f é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$. Em particular, f é contínua em $\mathbb{R}$. Tem-se $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$, pelo que o Teorema de Bolzano garante a existência de $x_0 \in]0, 1[$ tal que $f(x_0) = 0$.

Para verificar se f tem mais zeros reais estudemos o sinal da função derivada. Tem-se $f'(x) = 3x^2 + 1$ que é estritamente positivo para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Por conseguinte, a função f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$. Como tal, f é injetiva, o que significa que x_0 é o único ponto para o qual se verifica $f(x_0) = 0$.

3.2. Seja $f(x) = x^9 + 2x^5 - 5$, $x \in \mathbb{R}$. Novamente trata-se de uma função polinomial e, portanto, de classe C^∞ em $\mathbb{R}$. Como $f(1) = -2 < 0$ e $f(2) = 2^9 + 2^5 - 5 > 0$, resulta da continuidade de f em $\mathbb{R}$ e da aplicação do Teorema de Bolzano que existe um ponto $x_0 \in]1, 2[$ tal que $f(x_0) = 0$.

Em termos de derivada, $f'(x) = 9x^8 + 10x^4 = x^4(9x^4 + 10)$ anula-se apenas em $x = 0$, sendo sempre positiva nos restantes pontos $x \in \mathbb{R}$. Consequentemente:

- A função f é estritamente crescente no intervalo $]-\infty, 0]$, o que significa que, para qualquer $x < 0$, $f(x) < f(0) = -5$ e, portanto, $f(x) \neq 0$;
- No intervalo $[0, +\infty[$ a função f também é estritamente crescente e, por conseguinte, injetiva, o que significa que $x_0 \in]1, 2[$ é o único ponto do intervalo $[0, +\infty[$ que verifica $f(x_0) = 0$.

Dito de outro modo, equivalente, x_0 é a única raiz real da equação $x^9 + 2x^5 - 5 = 0$.

4. Comece-se por observar que a função f é contínua em $\mathbb{R}$, por ser soma das funções contínuas em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{sen}(\pi x)$ (trigonométrica) e $\mathbb{R} \ni x \mapsto 2x^3 - 4$ (polinomial). Assim e em particular, f é contínua no intervalo limitado e fechado $[1, 2]$. Como

$$f(1) = \operatorname{sen}(\pi) + 2 - 4 = -2 < 0$$

e

$$f(2) = \operatorname{sen}(2\pi) + 2 \times 2^3 - 4 = 12 > 0,$$

resulta do Teorema de Bolzano que existe um ponto $c \in]1, 2[$ tal que $f(c) = 0$.

Vejamos que tal ponto é único por recurso ao Teorema de Rolle (pág. 315). Para o efeito, observe-se que a função f também é diferenciável em $\mathbb{R}$ (por ser soma de uma função trigonométrica e de uma função polinomial), tendo-se

$$f'(x) = \pi\cos(\pi x) + 6x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Desta expressão resulta, para $x \in \,]1,2[$, que

$$1 < x < 2 \implies -1 < \cos(\pi x) < 1 \implies -\pi < \pi\cos(\pi x) < \pi$$

e

$$x > 1 \implies x^2 > 1 \implies 6x^2 > 6,$$

pelo que

$$f'(x) = \pi\cos(\pi x) + 6x^2 \geq -\pi + 6 > 0, \quad \forall\, x \in \,]1,2[\,. \tag{1}$$

Isto permite concluir a unicidade de c. Com efeito, se existisse um segundo ponto $d \in \,]1,2[$ tal que $f(d) = 0$, então, pelo Teorema de Rolle, a função f' teria que se anular nalgum ponto do intervalo $]1,2[$, o que contradiz (1). Por absurdo, fica assim provada a unicidade do zero c.

5.1. Dados $0 < x < y$, considere-se a função logaritmo, que é contínua no intervalo $[x,y]$ e diferenciável no intervalo $]x,y[$. Pelo Teorema de Lagrange (pág. 317), existe $z \in \,]x,y[$ tal que

$$\ln\frac{y}{x} = \ln y - \ln x = (y-x)\ln'(z) = \frac{y-x}{z}$$

Uma vez que $(0 <)\ z < y$ e $x < z$, obtém-se, respetivamente,

$$\frac{y-x}{z} > \frac{y-x}{y} = 1 - \frac{x}{y}, \qquad \frac{y-x}{z} < \frac{y-x}{x} = \frac{y}{x} - 1,$$

com o que fica provado o pretendido.

5.2. Fixada uma constante $\alpha > 1$, seja $f(y) = (1+y)^\alpha$. Para cada $x > 0$, f é uma função contínua no intervalo $[0,x]$ e diferenciável em $]0,x[$, o que novamente pelo Teorema de Lagrange permite concluir a existência de uma constante $z \in \,]0,x[$ tal que $f(x) - f(0) = (x-0)f'(z)$, ou seja,

$$(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x(1+z)^{\alpha-1}.$$

Como $\alpha > 1$, tem-se $\alpha - 1 > 0$, o que implica, por $z > 0$, que $(1+z)^{\alpha-1} > 1$. Assim sendo,

$$(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x(1+z)^{\alpha-1} > \alpha x.$$

5.3. A diferença em relação à alínea anterior é que agora $\alpha \in]0,1[$ e, portanto, o sinal de $\alpha - 1$ é diferente, ou seja, $\alpha - 1 < 0$. Assim, $(1+z)^{\alpha-1} < 1$ e, por conseguinte,

$$(1+x)^{\alpha} - 1 = \alpha x (1+z)^{\alpha-1} < \alpha x.$$

6.1. Considere-se a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = 1 + t^a - (1+t)^a, \quad t \in [0,1].$$

Trata-se de uma função diferenciável em $]0,1[$ com

$$f'(t) = a(t^{a-1} - (1+t)^{a-1}), \quad \forall\, t \in]0,1[.$$

Como $0 < a \leq 1$ (o que implica que $a - 1 \leq 0$), para $t \in]0,1[$ tem-se

$$t < t+1 \implies (t+1)^{a-1} < t^{a-1} \implies f'(t) > 0.$$

Assim sendo, a função f é estritamente crescente em $[0,1]$ (cf. Teorema 1, pág. 337). Como $f(0) = 0$ tem-se assim que $f(t) \geq f(0) = 0$ para todo o $t \in [0,1]$, o que prova a desigualdade pretendida.

6.2. Dados $x, y > 0$, suponhamos que $y \leq x$. Logo $0 < \frac{y}{x} \leq 1$, resultando da alínea anterior que

$$(x+y)^a = x^a \left(1 + \frac{y}{x}\right)^a \leq x^a \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^a\right) = x^a + y^a.$$

Caso $0 < x \leq y$, a prova decorre de modo semelhante. Os casos em que $x = 0$ ou $y = 0$ são de fácil verificação.

6.3. Como $0 < a \leq 1$ e $0 \leq x_n^a \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ (o que conduz a $0 \leq x_n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$), tem-se

$$x_n \leq x_n^a, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

resultando a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ da convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^a$ e da aplicação do Critério Geral da Comparação (Teorema 5, pág. 592).

Para provar a desigualdade do enunciado, observe-se que pela alínea anterior tem-se

$$(x_1 + x_2)^a \leq x_1^a + x_2^a.$$

Mais geralmente, pelo método de indução (exercício!) tem-se

$$(\underbrace{x_1 + \ldots + x_n}_{:=S_n})^a \leq x_1^a + \ldots + x_n^a, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, por definição de série convergente (Definição 1 pág. 575), conclui-se que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)^a = (\lim_n S_n)^a = \lim_n S_n^a \leq \lim_n x_1^a + \ldots + x_n^a := \sum_{n=1}^{\infty} x_n^a,$$

onde na segunda igualdade se utilizou a continuidade da função $[0,+\infty[\ \ni x \mapsto x^a$.

7.1. Tem-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Uma vez que as funções que surgem no numerador e no denominador são ambas diferenciáveis com $\mathrm{sen}^2(x) \neq 0$ para $x \neq 0$ numa vizinhança de 0, utilizemos a versão da regra de Cauchy (Teorema 2, pág. 365). Por ela, obtém-se então o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{sen}(x) - x)'}{(\mathrm{sen}^2(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{2\mathrm{sen}(x)\cos(x)}, \tag{2}$$

que é novamente uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Uma nova aplicação da regra de Cauchy conduz a

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x) - 1)'}{(2\mathrm{sen}(x)\cos(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\mathrm{sen}(x)}{2\cos^2(x) - 2\mathrm{sen}^2(x)} = \frac{0}{2} = 0.$$

Como este último limite existe, resulta do Teorema 2 (pág. 365) que o limite (2) também existe, tendo-se

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{2\mathrm{sen}(x)\cos(x)} = 0. \tag{3}$$

Da existência deste limite e novamente pelo Teorema 2 (pág. 365) conclui-se então que o limite do enunciado existe e é igual a (3). Ou seja,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x) - x}{\mathrm{sen}^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{sen}(x) - x)'}{(\mathrm{sen}^2(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{2\mathrm{sen}(x)\cos(x)} = 0.$$

7.2. Nesta alínea e na seguinte convém ter presente as páginas 372 e 373 do manual. No caso deste exercício, como $\lim_{x\to 0} \mathrm{sen}\, x = \lim_{x\to 0} \mathrm{sen}(2x) = 0$ tem-se uma indeterminação do tipo 0^0. Usando o facto de $a^b = e^{b \ln a}$, podemos reescrever $(\mathrm{sen}\, x)^{\mathrm{sen}(2x)}$ como $e^{\mathrm{sen}(2x)\ln(\mathrm{sen}\, x)}$ e, <u>**se**</u> o limite

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{sen}(2x)\ln(\mathrm{sen}\, x) \tag{4}$$

existir, então o limite $\lim_{x\to0^+} e^{\operatorname{sen}(2x)\ln(\operatorname{sen}x)}$ também existe e tem-se

$$\lim_{x\to0^+}(\operatorname{sen}x)^{\operatorname{sen}(2x)} = \lim_{x\to0^+} e^{\operatorname{sen}(2x)\ln(\operatorname{sen}x)} = e^{\lim_{x\to0^+}\operatorname{sen}(2x)\ln(\operatorname{sen}x)}.$$

Para verificar que o limite (4) existe, comece-se por observar que (4) é uma indeterminação do tipo $0\times(-\infty)$. Escrevendo $\operatorname{sen}(2x)\ln(\operatorname{sen}x)$ na forma de fração

$$\operatorname{sen}(2x)\ln(\operatorname{sen}x) = \frac{\ln(\operatorname{sen}x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}},$$

o limite (4) transforma-se numa indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que permite utilizar a regra de Cauchy. Por esta,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln(\operatorname{sen}x))'}{\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}\right)'} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}{-\frac{2\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2(2x)}} = -\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x\operatorname{sen}^2(2x)}{2\operatorname{sen}x\,\cos(2x)}. \tag{5}$$

Relativamente à última expressão, uma vez que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}x\cos x$, podemos reescrevê-la na forma

$$\frac{\cos x\operatorname{sen}^2(2x)}{2\operatorname{sen}x\,\cos(2x)} = \frac{4\cos^3x\operatorname{sen}^2x}{2\operatorname{sen}x\,\cos(2x)} = \frac{2\cos^3x\operatorname{sen}x}{\cos(2x)}$$

e, assim,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x\operatorname{sen}^2(2x)}{2\operatorname{sen}x\,\cos(2x)} = \lim_{x\to0^+}\frac{2\cos^3x\operatorname{sen}x}{\cos(2x)} = 0.$$

Ou seja, o limite (5) existe. Pela regra de Cauchy, isto significa que o limite

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\operatorname{sen}x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}}$$

existe e tem-se

$$\lim_{x\to0^+}\operatorname{sen}(2x)\ln(\operatorname{sen}x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\operatorname{sen}x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}} = \lim_{x\to0^+}\frac{(\ln(\operatorname{sen}x))'}{\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}\right)'} = 0.$$

Pelo que foi indicado logo no início, como consequência tem-se

$$\lim_{x\to0^+}(\operatorname{sen}x)^{\operatorname{sen}(2x)} = e^{\lim_{x\to0^+}\operatorname{sen}(2x)\ln(\operatorname{sen}x)} = e^0 = 1.$$

7.3. Como $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} 1/x = \infty$, neste caso tem-se uma indeterminação do tipo 1^∞. Tal como no exercício anterior, façamos uso da função exponencial:

$$\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)}.$$

Como então explicado, caso o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) \tag{6}$$

exista, então o limite $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)}$ também existe e tem-se

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)}.$$

Contudo, (6) é uma ideterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Utilizando a regra de Cauchy, obtém-se

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x\cos x}{x \operatorname{sen} x}, \tag{7}$$

que é novamente uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando novamente a regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen}(x) - x\cos x)'}{(x\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(x) + x\cos x} \tag{8}$$

que é novamente uma indeterminação. Em vez que se aplicar uma terceira vez a regra de Cauchy, divida-se o numerador e o denominador desta última expressão por $\operatorname{sen} x$. Deste modo obtém-se

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(x) + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1 + \frac{x}{\operatorname{sen} x}\cos x} = \frac{0}{1+1} = 0.$$

Ou seja, o limite (8) existe. Pela regra de Cauchy, isto significa que o limite (7) existe e tem-se

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x\cos x}{x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen}(x) - x\cos x)'}{(x\operatorname{sen} x)'} = 0.$$

Por nova aplicação da regra de Cauchy, então o limite (6) também existe, tendo-se

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)\right)'}{x'} = 0.$$

Logo e em conformidade com o explicado no início,

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)} = e^0 = 1.$$