Investigação Operacional | 21076

Período de Realização

Decorre dia 8 de Junho de 2020, das 10:00 às 14:00

Data de Limite de Entrega

8 de Junho de 2020, até às 14h00 de Portugal Continental

Tema

Programação linear, filas de espera, gestão de processos, simulação

Competências

Deve demonstrar ter capacidade para aplicar na resolução de problemas os vários métodos estudados nos temas acima.

Trabalho a desenvolver

Deve resolver os exercícios propostos no enunciado, de forma clara e sucinta, com rigor científico e justificação adequada das respostas.

Enunciado

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

1 (2 val.) Um fabricante de móveis dispõe de 6 placas de madeira que poderá utilizar para fabricar biombos decorativos. O fabricante dispõe de 28h disponíveis e decidiu só fabricar dois modelos de biombo. Segundo as suas estimativas, cada biombo modelo 1 requer 2 placas de madeira e 7h de mão-de-obra, enquanto que um biombo modelo 2 requer 1 placa de madeira e 8h de mão-de-obra. Cada biombo modelo 1 será vendido a 120 u.m., enquanto que cada biombo modelo 2 será vendido a 80 u.m. Quantos biombos de cada modelo deverão ser fabricados se se pretender maximizar a receita?
Formalize o problema apresentado, justificando cuidadosamente todas as decisões.

Resolução:

O fabricante tem de decidir quantos biombos fabricar do modelo 1 e quantos do modelo 2. Assim, as variáveis de decisão são o número de biombos a fabricar de cada modelo:

X : número de biombos do modelo 1 a fabricar

Y : número de biombos do modelo 2 a fabricar

Note-se que X e Y assumem valores inteiros positivos.
O objectivo é maximizar a receita. Assim, a função objectivo é a receita da venda dos dois tipos de biombo:

$$f(X, Y) = 120X + 80Y$$

Cada biombo do modelo 1 é vendido a 120 u.m., logo a receita da venda dos X biombos do modelo 1 é $120X$ u.m., enquanto que a venda dos Y biombos do modelo 2 rende $80Y$ u.m.
O fabricante tem apenas duas restrições, ambas relacionadas com a matéria-prima e a mão-de-obra. Dispõe apenas de 6 placas, portanto ao fabricar X biombos do modelo 1 e Y biombos do modelo 2 não pode gastar mais do que 6 placas. Como cada biombo do modelo 1 precisa de 2 placas e cada biombo do modelo 2 precisa de 1 placa, ficamos com a seguinte restrição.

$$2X + Y \leq 6$$

Em relação à mão-de-obra, o fabricante dispõe de 28h. Cada biombo do modelo 1 precisa de 7h a ser produzido, logo, no total, para fabricar X biombos do modelo 1 são necessárias $7X$ horas. Para os biombos do modelo 2, cada um precisa de 8h de mão-de-obra, sendo necessárias $8Y$ horas para produzir Y biombos do modelo 2. Assim, para produzir X biombos do modelo 1 e Y do modelo 2 são necessárias $7X + 8Y$ horas de mão-de-obra, sendo que o fabricante apenas dispõe de 28h.

$$7X + 8Y \leq 28$$

Assim, o problema de programação linear é o seguinte.

$$\max f = 120X + 80Y$$
$$s.a. \begin{cases} 2X + Y \leq 6 \\ 7X + 8Y \leq 28 \\ X, Y \geq 0 \\ X, Y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2 (4 val.) Considere o seguinte problema de programação linear:

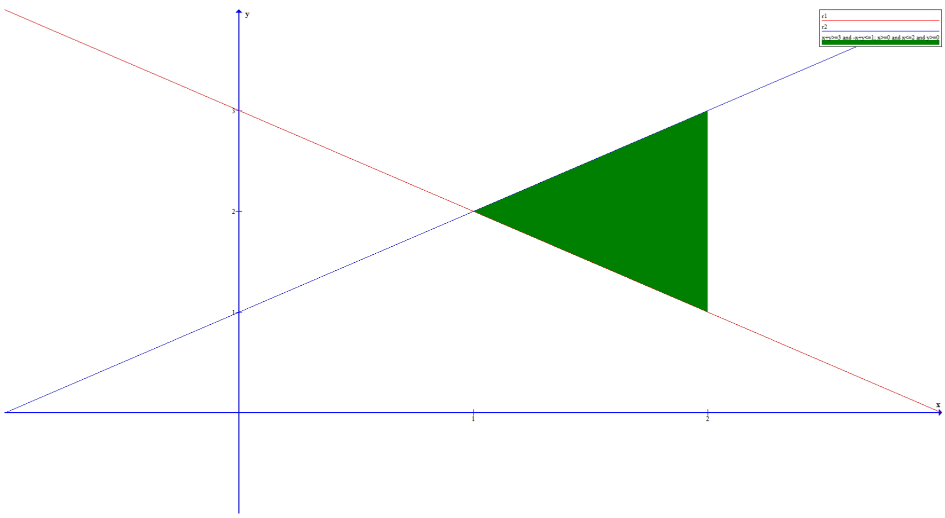
$$\max F = X + 2Y$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} X + Y \geq 3 \\ -X + Y \leq 1 \\ X \leq 2 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

a) Resolva-o graficamente, justificando todos os passos (determinação de todas as restrições, intersecção das restrições, curvas de nível da função objectivo, sentido de crescimento da função objectivo, determinação de ponto(s) óptimo(s),...).

Resolução:
O primeiro passo para resolver o problema pelo método gráfico é desenhar o polígono admissível, tendo em conta as restrições. Tendo em conta que $X, Y \geq 0$, o polígono admissível encontra-se no primeiro quadrante.
A recta correspondente à primeira restrição é $X+Y = 3 \Leftrightarrow Y = -X+3$, ou seja é a recta de declive -1 (paralela à bissectriz dos quadrantes pares) que intersecta o eixo vertical no ponto $(0, 3)$. Como a primeira restrição é equivalente a $Y \geq -X + 3$, estamos interessados no semiplano acima da recta $Y = -X + 3$.

A recta correspondente à segunda restrição é dada pela equação $-X + Y = 1 \Leftrightarrow Y = X + 1$, ou seja, é a recta de declive 1 (paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares) que cruza o eixo vertical no ponto $(0, 1)$. Como a segunda restrição é equivalente a $Y \leq X + 1$, estamos interessados no semiplano abaixo da recta $Y = X + 1$.
A terceira restrição corresponde ao semiplano à esquerda da recta vertical que passa no ponto $(2, 0)$.
Assim, o polígono admissível é a região do primeiro quadrante que resulta da intersecção do semiplano acima da recta $Y = -X + 3$ com o semiplano abaixo da recta $Y = X + 1$ e com o semiplano à esquerda da recta vertical $X = 2$.



Para descobrir o ponto(s) do polígono admissível onde F assume o valor máximo, temos de perceber quais são as curvas de nível de F e em que sentido cresce.

Curvas de nível de F (com $c \in \mathbb{R}$ constante):

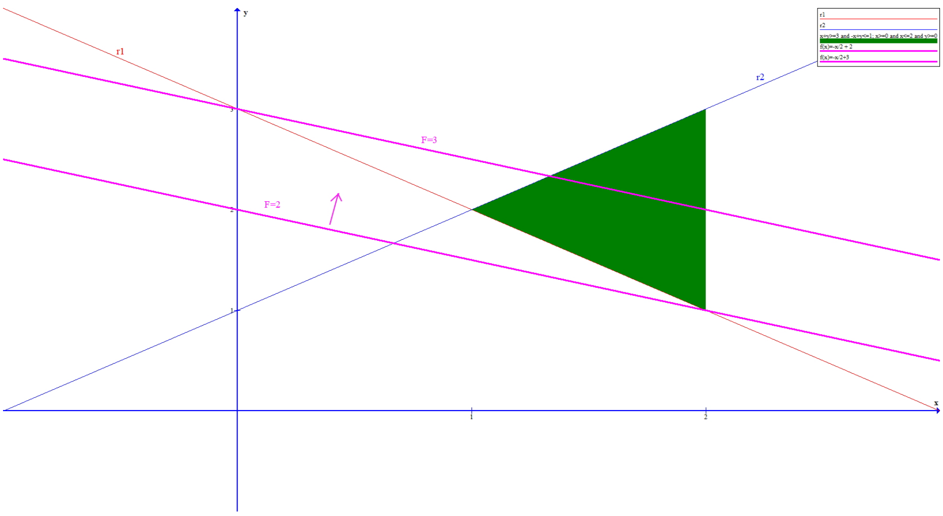
$$F(X, Y) = c \Leftrightarrow X + 2Y = c \Leftrightarrow Y = -\frac{X}{2} + \frac{c}{2}$$

Assim, as rectas de nível da função F são as rectas de declive $-1/2$. Pela expressão da função F, à medida que o valor de Y aumenta, sai que o valor de F aumenta. Assim, no gráfico seguinte, representa-se a violeta duas rectas de nível de F, assim como o sentido de crescimento.

Assim, pelo sentido de crescimento da função F, percebe-se facilmente que o ponto do polígono em que a função F assume o valor mais elevado é o ponto na intersecção das rectas correspondentes às restrições 2 e 3.

$$\begin{cases} -X+Y=1 \\ X=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2+Y=1 \\ X=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y=3 \\ X=2 \end{cases}$$

Assim, o ponto óptimo é o ponto $(2,3)$, correspondente a $X^* = 2$ e $Y^* = 3$ e em que o valor máximo de F é $F^* = 2 + 2 \times 3 = 8$.



b) Utilize o método do simplex para resolver o problema, indicando o método utilizado e justificando o porquê da escolha. Justifique cuidadosamente todos os cálculos.
Argumente, justificando qual dos métodos (entre o método gráfico ou o método do simplex escolhido) usaria para resolver um problema de programação linear semelhante com 4 variáveis de decisão.

Resolução:

Problema na forma standard:

$$\max F = X + 2Y + 0F_1 + 0F_2 + 0F_3 - M\alpha$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} X + Y - F_1 + \alpha = 3 \\ -X + Y + F_2 = 1 \\ X + F_3 = 2 \\ X, Y, F_1, F_2, F_3, \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Como o problema tem uma desigualdade $\geq$, na forma standard, além das variáveis de folga, acrescentou-se uma variável artificial α. O problema vai ser resolvido pelo Método da base artificial, mas também poderia ser resolvido pelo Método das duas fases.

operação	base	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ_i
		1	1	-1	0	0	1	3	
	F_2	-1	1	0	1	0	0	1	
	F_3	1	0	0	0	1	0	2	
	F	-1	-2	0	0	0	M		
	α	1	1	-1	0	0	1	3	3
	F_2	-1	1	0	1	0	0	1	1 $\leftarrow$
	F_3	1	0	0	0	1	0	2	—
	F	-1-M	-2-M	M	0	0	0	-3M	
			$\uparrow$						
$l_1 - l_2$	α	2	0	-1	-1	0	1	2	1 $\leftarrow$
	Y	-1	1	0	1	0	0	1	—
	F_3	1	0	0	0	1	0	2	2
$(2+M)l_2 + l_4$	F	-3-2M	0	M	2+M	0	0	2-2M	
		$\uparrow$							
$\frac{1}{2}l_1$	X	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	—
$l_2 + \frac{1}{2}l_1$	Y	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	—
$-\frac{1}{2}l_1 + l_3$	F_3	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1	2 $\leftarrow$
$(3+2M)\frac{1}{2}l_1 + l_4$	F	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$+M	5	
				$\uparrow$					
$l_3 + l_1$	X	1	0	0	0	1	0	2	
$l_3 + l_2$	Y	0	1	0	1	1	0	3	
$2l_3$	F_1	0	0	1	1	2	-1	2	
$3l_3 + l_4$	F	0	0	0	2	3	M	8	

Como na linha da função F já não há valores negativos, o método do simplex termina, tendo sido obtido o valor máximo de F, $F^* = 8$, quando $X^* = 2$, $Y^* = 3$ e $F_1^* = 2$.
Note-se que o valor na linha de F correspondente às variáveis de folga F_2 e F_3 (variáveis não básicas) é não nulo. Assim, temos a garantia que a solução óptima é única.

Se tivéssemos de resolver um problema semelhante com 4 variáveis de decisão, teríamos de optar pelo método do simplex, uma vez que o método gráfico apenas permite resolver problemas lineares com 2 variáveis de decisão.

3 (5 val.) Uma linha de atendimento telefónico do supermercado *Fruta Fresca* tem ao serviço um único operador que trabalha 6 horas por dia para satisfazer pedidos e prestar informações. Sempre que determinado cliente esteja a ser atendido pelo operador, as restantes chamadas existentes em linha são colocadas em espera até serem atendidas por ordem de chegada. Atualmente, a linha de apoio ao cliente recebe, em média, 20 chamadas por hora e o tempo médio de atendimento de cada chamada pelo operador é de 2 minutos. Considere que as chamadas entram em linha de acordo com um Processo de Poisson e que o tempo de atendimento de cada uma delas pelo operador segue uma distribuição Exponencial Negativa.

a) Identifique e caracterize o tipo de sistema de fila de espera associado ao problema enunciado, justificando detalhadamente a caracterização.

Resolução:
Trata-se de um sistema $M/M/1$ (População=∞, Fila máxima=∞) porque tanto o processo de chegada de clientes como o tempo de atendimento correspondem a processos Poissonianos. O número de servidores é 1 porque tem apenas um operador a atender as chamadas.
Processo de chegada Poissoniano com uma taxa de chegadas $\lambda = \frac{1}{3}$ chamadas por minuto (1 chamada de 3 em 3 minutos, ou 20 chamadas por hora).
Duração do serviço com distribuição Exponencial Negativa com taxa de atendimento de $\mu = \frac{1}{2}$ chamadas por minuto (2 minutos por chamada).
População de chamadas ilimitada.
Disciplina da fila: FIFO (first in first out).

b) Determine o tempo, em média, que cada chamada demora a ser atendida pelo operador.

Resolução:
Na alínea anterior vimos que $\lambda = \frac{1}{3}$ e $\mu = \frac{1}{2}$. Logo

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} < 1$$

Assim, podemos calcular o tempo médio de espera para o atendimento.

$$W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 4$$

Assim, o tempo médio de espera para cada chamada ser atendida é de 4 minutos.

c) Qual o número médio de chamadas existentes em linha (espera + atendimento)?

Resolução:
O número médio de chamadas em linha (espera + atendimento) é dado por L.

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = 2$$

Assim, existem em média 2 chamadas em linha.

d) Qual a probabilidade de uma chamada permanecer em linha mais de 2 minutos?

Resolução:
Uma chamada permanecer em linha mais do que 2 minutos, equivale a dizer que fica no sistema mais do que 2 minutos. Ou seja, queremos calcular $P(W > 2)$.

$$P(W > 2) = e^{-\mu(1-\rho)2} = e^{-\frac{1}{2}(1-\frac{2}{3})2} = e^{-\frac{1}{3}} \sim 0.7165$$

Assim, a probabilidade de uma chamada ficar em linha mais do que 2 minutos é cerca de 71,7%.

e) Em média, quanto tempo o operador está desocupado durante o horário diário de trabalho?

Resolução:
O tempo que o operador está desocupado corresponde a não ter chamadas em linha para atender e é dado por P_0.

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

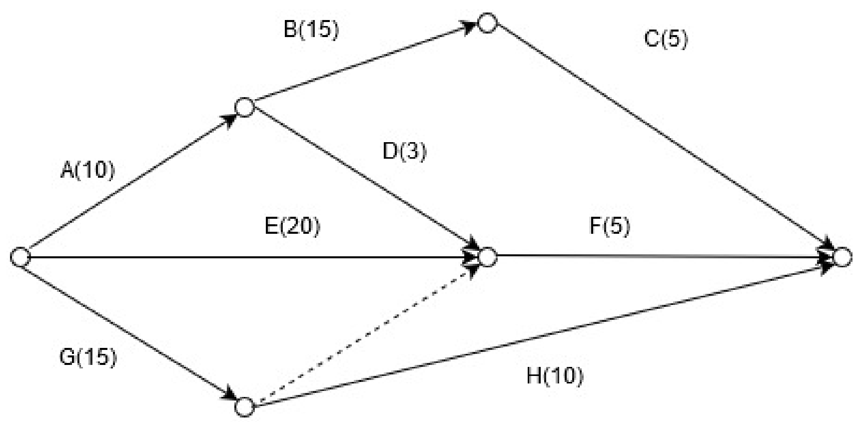
Assim, concluímos que o operador está um terço do seu tempo desocupado. Como este trabalha 6 horas por dia, então cerca de 2 horas por dia está desocupado.

4 (6 val.)
Considere o projecto com as características indicadas no quadro seguinte.

Actividade	Precedências	Duração (u.t.)
A	—	10
B	A	15
C	B	5
D	A	3
E	—	20
F	D, E, G	5
G	—	15
H	G	10

a) Esboce a rede do projecto.

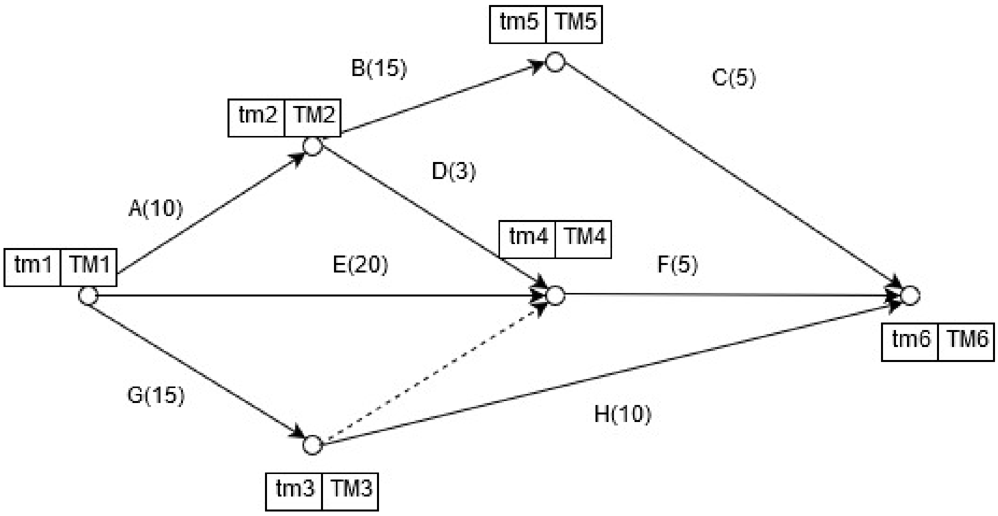
Resolução:



Como as actividades A, E e G não têm precedências, saem do nó inicial. A partir do fim da actividade A saem as actividades B e D que são as únicas que têm a actividade A como precedente. Do final das actividades D, E e G sai a actividade F, que tem como precedentes D, E e G. A partir da actividade G sai também a actividade H cujo único precedente é G. E de B sai a actividade C cjuo único precedente é B. As actividades C, F e H vão ter ao nó final, pois não são precedência de nenhuma outra actividade.

b) Determine o caminho crítico do projecto e indique a duração total do projecto. Justifique todos os cálculos que realizar.

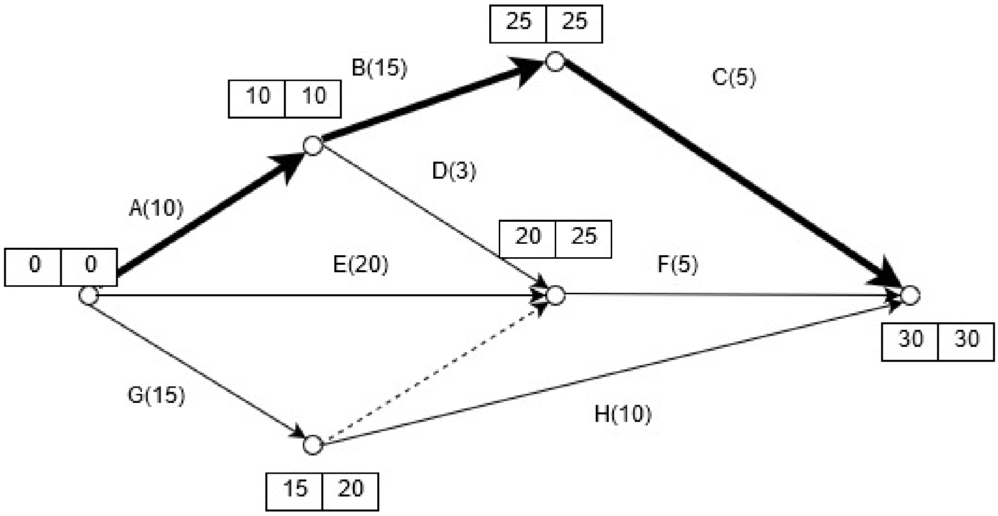
Resolução:



Vamos agora calcular os tempos mais cedo e os tempos mais tarde.

Tempos mais cedo (tm)
$tm_1 = 0$ (nó inicial)
$tm_2 = tm_1 + 10 = 10$
$tm_3 = tm_1 + 15 = 15$
$tm_4 = \max\{tm_2 + 3, tm_1 + 20, tm_3\} = \max\{13, 20, 15\} = 20$
$tm_5 = tm_2 + 15 = 25$
$tm_6 = \max\{tm_5 + 5, tm_4 + 5, tm_3 + 10\} = \max\{30, 25, 25\} = 30$

Tempos mais tarde (TM)
$TM_6 = tm_8 = 30$ (nó final)
$TM_5 = TM_6 - 5 = 25$
$TM_4 = TM_6 - 5 = 25$
$TM_3 = \min\{TM_4, TM_6 - 10\} = \min\{25, 20\} = 20$
$TM_2 = \min\{TM_5 - 15, TM_4 - 3\} = \min\{10, 22\} = 10$
$TM_1 = \min\{TM_2 - 10, TM_4 - 20, TM_3 - 15\} = \min\{0, 5, 5\} = 0$



Conclui-se que o caminho crítico é composto pelas actividades A, B e C. A duração total do projecto é 30 unidades de tempo.

c) Admita que é possível fazer reduções graduais segundo a seguinte tabela, em que ΔT representa a redução de duração em u.t. e ΔC representa o custo correspondente em u.m. O quadro apresenta a possibilidade de redução a 2 tempos distintos com custos diferentes (entre os 2 momentos). Em qualquer um dos momentos, o custo é diretamente proporcional à quantidade de u.t. a reduzir.

Actividade	$\Delta T1$	$\Delta C1$	$\Delta T2$	$\Delta C2$
A	2	3	1	5
B	4	2	2	7
C	2	4	1	6
D	1	4	—	—
E	5	2	2	5
F	1	3	—	—
G	3	5	1	7
H	4	3	2	5

Se pudesse investir 5 u.m. na redução total do projecto, que reduções efectuaria?
As reduções só podem ser feitas em valores inteiros da unidade de tempo.

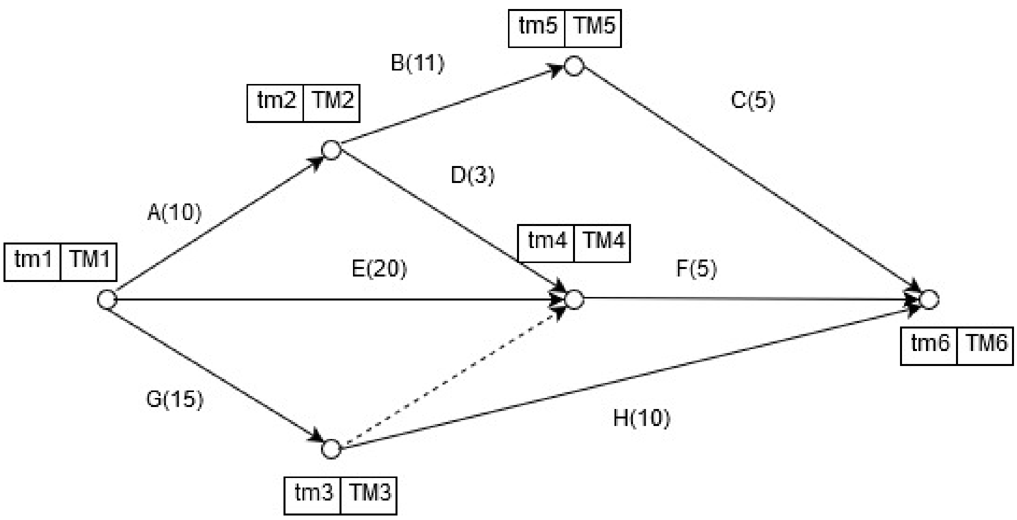
Resolução:
Vimos na alínea anterior que o caminho crítico é composto pelas actividades A, B e C. Seja a tabela seguinte a tabela de reduções correspondente às actividades do caminho crítico.

Actividade	$\Delta T1$	$\Delta C1$	$\Delta T2$	$\Delta C2$
A	2	3	1	5
B	4	2	2	7
C	2	4	1	6

Assim, temos o seguinte resultado.

Hipóteses de redução	A	B	C	1.ª Redução
ΔC (u.m.)	3	2	4	4 u.t. em B
ΔT (u.t.)	2	4	2	Custo=2 u.m.
C.U.R (u.m./u.t.)	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	Custo Acumulado = 2 u.m.

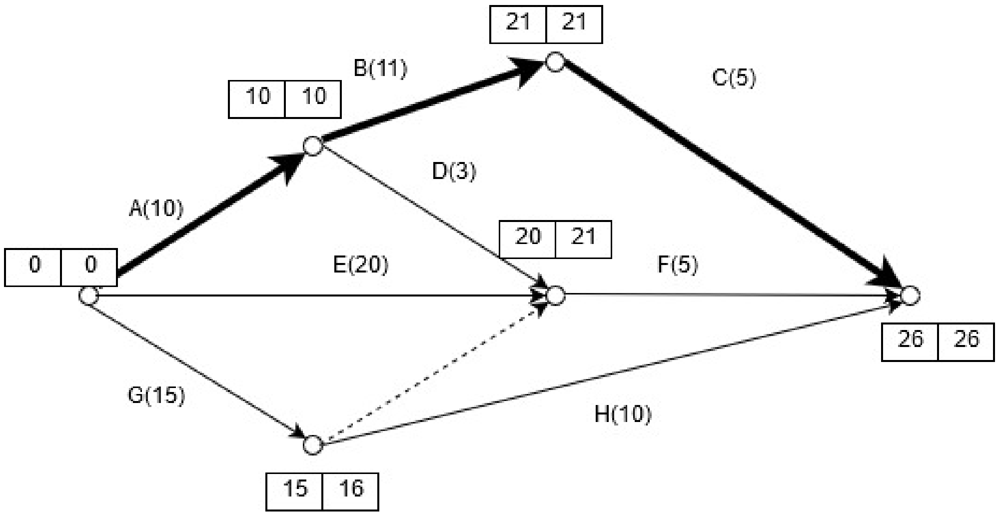
Após a 1.ª redução, reduziu-se 4 u.t. de duração do processo (na actividade B) com um custo de 2 u.m. Ficamos assim com a seguinte rede.



Vamos agora calcular os tempos mais cedo e os tempos mais tarde.

Tempos mais cedo (tm)
$tm_1 = 0$ (nó inicial)
$tm_2 = tm_1 + 10 = 10$
$tm_3 = tm_1 + 15 = 15$
$tm_4 = \max\{tm_2 + 3, tm_1 + 20, tm_3\} = \max\{13, 20, 15\} = 20$
$tm_5 = tm_2 + 11 = 21$
$tm_6 = \max\{tm_5 + 5, tm_4 + 5, tm_3 + 10\} = \max\{26, 25, 25\} = 26$

Tempos mais tarde (TM)
$TM_6 = tm_8 = 26$ (nó final)
$TM_5 = TM_6 - 5 = 21$
$TM_4 = TM_6 - 5 = 21$
$TM_3 = \min\{TM_4, TM_6 - 10\} = \min\{21, 16\} = 16$
$TM_2 = \min\{TM_5 - 11, TM_4 - 3\} = \min\{10, 18\} = 10$
$TM_1 = \min\{TM_2 - 10, TM_4 - 20, TM_3 - 15\} = \min\{0, 1, 1\} = 0$



Conclui-se que o caminho crítico é composto ainda pelas actividades A, B e C.

Como ainda só gastámos 2 u.m. das 5 u.m. disponíveis, vamos fazer outra redução.

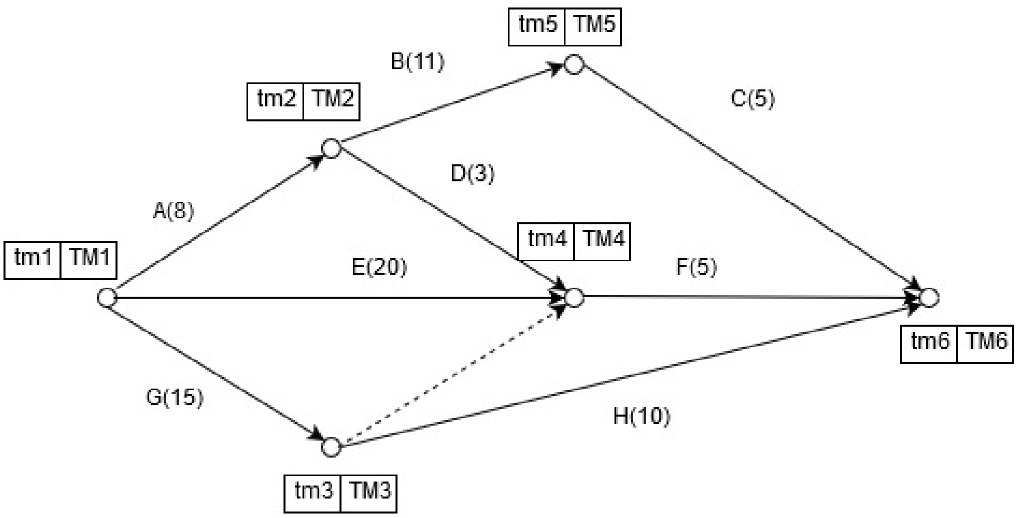
Seja a tabela seguinte a tabela de reduções correspondente às actividades do caminho crítico.

Actividade	$\Delta T1$	$\Delta C1$	$\Delta T2$	$\Delta C2$
A	2	3	1	5
B	—	—	2	7
C	2	4	1	6

Assim, temos o seguinte resultado.

Hipóteses de redução	A	B	C	2.ª Redução
ΔC (u.m.)	3	7	4	2 u.t. em A
ΔT (u.t.)	2	2	2	Custo=3 u.m.
C.U.R (u.m./u.t.)	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	2	Custo Acumulado = 5 u.m.

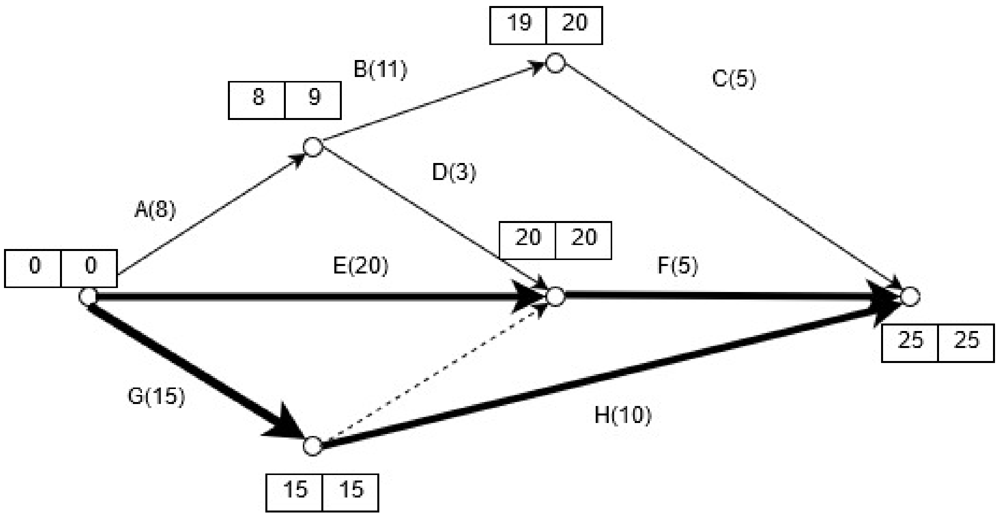
Após a 2.ª redução, reduziu-se 2 u.t. de duração do processo (na actividade A) com um custo de 3 u.m. Ficamos assim com a seguinte rede.



Vamos agora calcular os tempos mais cedo e os tempos mais tarde.

Tempos mais cedo (tm)
$tm_1 = 0$ (nó inicial)
$tm_2 = tm_1 + 8 = 8$
$tm_3 = tm_1 + 15 = 15$
$tm_4 = \max\{tm_2 + 3, tm_1 + 20, tm_3\} = \max\{11, 20, 15\} = 20$
$tm_5 = tm_2 + 11 = 19$
$tm_6 = \max\{tm_5 + 5, tm_4 + 5, tm_3 + 10\} = \max\{24, 25, 25\} = 25$

Tempos mais tarde (TM)
$TM_6 = tm_8 = 25$ (nó final)
$TM_5 = TM_6 - 5 = 20$
$TM_4 = TM_6 - 5 = 20$
$TM_3 = \min\{TM_4, TM_6 - 10\} = \min\{20, 15\} = 15$
$TM_2 = \min\{TM_5 - 11, TM_4 - 3\} = \min\{9, 17\} = 9$
$TM_1 = \min\{TM_2 - 8, TM_4 - 20, TM_3 - 15\} = \min\{1, 0, 0\} = 0$



Ao gastar 5 u.m. na redução da duração do projecto, iríamos reduzir 4 u.t. na actividade B e 2 u.t. na actividade A. Resulta que o caminho crítico passa a ser composta pelas actividades E, F, G e H com uma duração total do projecto de 25 u.t.

5 (3 val.) O tempo de entrega (em semanas) de um certo produto (em centenas de unidades) adquirido online é dado pela variável aleatória X com a seguinte função densidade de probabilidade.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{4} \\ 0, & x \geq \frac{5}{4} \end{cases}$$

Elabore uma rotina que lhe permita gerar números pseudo-aleatórios com a distribuição X, ou seja, que permita simular o tempo de entrega do produto em causa, recorrendo ao Método da Inversão. Apresente o fluxograma associado.

Resolução:
Sendo dada a função densidade de probabilidade, teremos de calcular a função distribuição de probabilidade.

Para $x < 0$, tem-se

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Para $0 \leq x < \frac{1}{2}$, tem-se

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\, dt + \int_{0}^{x} f_X(t)\, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} 2t\, dt = \\ &= 0 + \left[t^2\right]_0^x = \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Para $\frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{4}$, tem-se

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\, dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f_X(t) + \int_{\frac{1}{2}}^{x} f_X(t)\, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} 2t\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{x} 1\, dt = \\ &= 0 + \left[t^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + [t]_{\frac{1}{2}}^{x} = \\ &= \frac{1}{4} + x - \frac{1}{2} = \\ &= x - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Para $x \geq \frac{5}{4}$, tem-se

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f_X(t) + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} f_X(t)\,dt + \int_{\frac{5}{4}}^{x} f_X(t)\,dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} 2t\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} 1\,dt + \int_{\frac{5}{4}}^{x} 0\,dt = \\
&= 0 + \left[t^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[t\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} + 0 = \\
&= \frac{1}{4} + \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{4} \\ 1, & x \geq \frac{5}{4} \end{cases}$$

Assim, gerando um número pseudo-aleatório $u \in [0,1]$, teremos o seguinte.

Se $u \leq F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ (isto é para $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$), teremos de inverter a expressão $u = x^2$:

$$u = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{u}.$$

Como $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, temos que $x \geq 0$ e portanto $x = \sqrt{u}$.

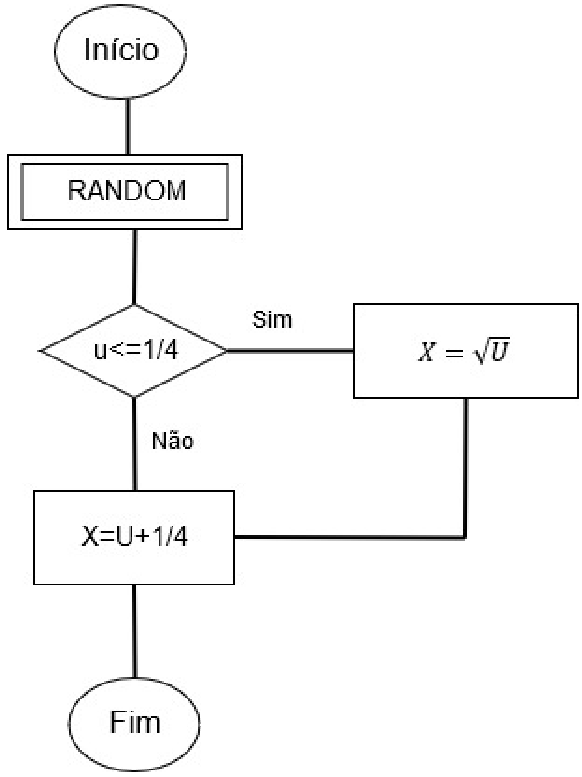
Se $F_X\left(\frac{1}{2}\right) \leq u \leq F_X\left(\frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq u \leq 1$ (isto é, para $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]$), teremos de inverter a ecpressão $u = x - \frac{1}{4}$:

$$u = x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = u + \frac{1}{4}.$$

Assim, gerada a variável pseudo-aleatória $U \in [0,1]$, obtemos a variável pseudo-aleatória X com a distribuição pretendida.

$$NPAX = \begin{cases} \sqrt{U}, & U \leq \frac{1}{4} \\ U + \frac{1}{4} & U > \frac{1}{4} \end{cases}$$

E temos o fluxograma associado.



FIM