UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

p-Fólio

U.C. 21079

Lógica e Teoria de Conjuntos
p-Fólio-Resolução

15 de Fevereiro de 2018

- INSTRUÇÕES -

- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Sempre que não utilize o enunciado da prova para resposta, poderá ficar na posse do mesmo.
- No caso de provas com escolha múltipla, **sem grelha de resposta**, deverá indicar a resposta correcta na folha de ponto, indicando o número da pergunta e a resposta que considera correcta.
- No caso de provas com escolha múltipla, **com grelha de resposta, tabela e/ou espaços para preenchimento**, deverá efectuar as respostas no enunciado, pelo que o mesmo deverá ser entregue ao vigilante, juntamente com a folha de ponto, **não sendo permitido ao estudante levar o enunciado**.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas, ou respostas apresentadas em folhas de rascunho.
- Os telemóveis deverão ser desligados durante toda a prova e os objectos pessoais deixados em local próprio da sala de exame.
- A prova é constituída por 3 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Utilize unicamente tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de máquina de calcular nem de elementos de consulta.
- **O p-fólio tem a duração máxima de 1 horas e 30 minutos**.
- As questões terão as cotações seguintes:

1	2	3	4
4.0	1.0	4.0	3.0

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

1. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade cujos parâmetros $\bar{n}$ (símbolos de constantes), $\times$ (símbolo de função 2-ária), P (símbolo de predicado 1-ário), R (símbolo de predicado 2-ário) e respectivas interpretações são:

Domínio de interpretação: as variáveis denotam os números naturais.

$\bar{n}$: "o número natural n".

$\times : (x, y) \mapsto x \times y$, faz corresponder aos números naturais x e y o seu produto $x \times y$.

$P(x)$: "x é um número par".

$R(x, y)$: "x é menor ou igual que y".

a) Determine a fbf de $\mathcal{L}$ correspondente à seguinte proposição composta.
"Todo o número par é múltiplo de 2".

Resolução: $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y(x = \overline{2} \times y))$

b) Indique o subconjunto de $\mathbb{N}$ que é definido pela interpretação da seguinte fbf de $\mathcal{L}$.

$$R(x \times \overline{10}, \overline{70}) \wedge P(x) \wedge \neg R(x, \overline{2}).$$

Resolução: A fórmula exprime que $10x \leq 70 \wedge x$ é par $\wedge\ x > 2$. Logo, o subconjunto de $\mathbb{N}$ definido pela fórmula é $\{4, 6\}$.

2. Indique conjuntos A e B tais que:

a) $A \backslash B = A$

Resolução: Por exemplo, $A = \{0, 1\}$ e B=$\{3\}$.

b) $A \in \mathcal{P}(B)$.

Resolução: Por exemplo $A = \emptyset$ e $B = \{1\}$, pois nesse caso $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

3. Considere a implicação $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$.

a) Apresente a demonstração informal da implicação acima.

Resolução: Suponhamos que $A \subseteq B$. Queremos provar que $A \cup B = B$, isto é, $A \cup B \subseteq B$ e $B \subseteq A \cup B$. Comecemos por provar que $A \cup B \subseteq B$. Seja $x \in A \cup B$. Temos que $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in B$ temos o pretendido. Se $x \in A$, como $A \subseteq B$, temos que $x \in B$. Provemos agora que $B \subseteq A \cup B$. Seja $x \in B$. Mas então é verdade que $x \in A \vee x \in B$, logo temos $x \in A \cup B$.

b) Apresente a demonstração formal da implicação recíproca.

Resolução:

A implicação recíproca é: $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

$\{1\}$	1.	$A \cup B = B$	Hip.$[\Rightarrow I]$
$\{1, x\}$	2.		Hip.$[\forall I]$
$\{1, x, 3\}$	3.	$x \in A$	Hip.$[\Rightarrow I]$
$\{1, x, 3\}$	4.	$x \in A \ \vee \ x \in B$	$3[\vee I]$
$\{1, x, 3\}$	5.	$x \in A \cup B$	$4[\text{Def. } \cup]$
$\{1, x, 3\}$	6.	$x \in B$	$5, 1$
$\{1, x\}$	7.	$x \in A \Rightarrow x \in B$	$3 - 6[\Rightarrow I]$
$\{1\}$	8.	$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$	$2 - 7[\forall I]$
$\{1\}$	9.	$A \subseteq B$	$8[\text{Def. } \subseteq]$
$-$	10.	$A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$	$1 - 9[\Rightarrow I]$

4. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade, com parâmetro R (símbolo de predicado 2-ário) cuja respectiva interpretação é:

Domínio de interpretação: as variáveis denotam os números inteiros ($\mathbb{Z}$).

$R(x, y)$: "$|x| = y$".

Diga, justificando, se a relação R é

a) reflexiva

Resolução: Não é reflexiva. Por exemplo, $-2 \in \mathbb{Z}$ e não temos $R(-2, -2)$ pois $|-2| \neq -2$.

b) simétrica

Resolução: Não é simétrica. Note que $|-2| = 2$ e portanto $R(-2, 2)$. Mas $\neg R(2, -2)$ visto $|2| \neq -2$.

c) transitiva.

Resolução: É transitiva. Suponhamos que $R(x, y)$ e $R(y, z)$. Queremos provar que $R(x, z)$. De $R(x, y)$ temos que $|x| = y$ e de $R(y, z)$ temos que $|y| = z$. Logo y é um número positivo e portanto $|y| = y$. Temos assim que $|x| = y = |y| = z$.

FIM