Análise Infinitesimal | 21175

Período de Realização

Decorre de 4 a 14 de novembro de 2022

Data de Limite de Entrega

14 de novembro de 2022, até às 23h55m de Portugal Continental

Tema

Funções, limites e continuidade. Indução matemática e recursividade.

Objetivos

Introduzir conceitos fundamentais da análise matemática, tais como as noções de função, de limite e de continuidade de uma função, de indução matemática e recursividade

Trabalho a desenvolver

Resolver os exercícios propostos, de forma clara e sucinta, com rigor científico e justificação adequada das respostas.

Recursos

Material indicado na plataforma, nomeadamente:

- P. M. Duarte, *Notas de Cálculo para Informática* (disponível na plataforma)

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações: rigor científico, clareza, justificação e completude das respostas dadas. A cotação total deste e-Fólio é de **4 valores**, sendo distribuídos por questão da seguinte forma:

1. Questão 1= 1.2 valores, distribuídos da seguinte forma pelas alíneas:
   (a) 0.3 valores
   (b) 0.3 valores
   (c) 0.3 valores
   (d) 0.3 valores
2. Questão 2= 0.6 valores, distribuídos da seguinte forma pelas alíneas:
   (a) 0.3 valores
   (b) 0.3 valores
3. Questão 3= 0.9 valores, distribuídos da seguinte forma pelas alíneas:
   (a) 0.3 valores
   (b) 0.3 valores
   (c) 0.3 valores
4. Questão 4= 0.4 valores
5. Questão 5= 0.9 valores, distribuídos da seguinte forma pelas alíneas:
   (a) 0.3 valores
   (b) 0.3 valores
   (c) 0.3 valores

Total: 4.0 valores

Normas a respeitar

Pode redigir o seu E-fólio na Folha de Resolução disponibilizada na turma ou num outro formato, desde que preencha todos os dados do cabeçalho.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 10 páginas A4.

Não é permitido o uso de computador ou máquina de calcular gráfica para traçar gráficos, nem para o cálculo de limites. Todas as resoluções devem ser realizadas de forma puramente analítica.

O cálculo dos limites que constam desta prova, apenas poderá ser efectuado usando resultados descritos ou usados nos primeiros seis capítulos do manual adoptado (*Notas de Cálculo para Informática*). Em particular, não poderão usar a regra de Cauchy (também conhecida como a regra de l'Hôpital) para o levantamento de indeterminações.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio e do código da disciplina, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA-21175.

Deve carregar o referido ficheiro **em formato pdf** para a plataforma no dispositivo E-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Eliana Manuel Pinho, Michael Rothwell e Clarence Protin

1. **[1.2 val.]** Considere a seguinte função

$$f : \left[-\tfrac{5}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \quad \text{com} \quad f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x & \text{se} \quad \text{x} \leq 0 \\ 2\sin(x) + x + 1 & \text{se} \quad \text{x} > 0 \end{cases}$$

   (a) **[0.3 val.]** Estude a continuidade de f no seu domínio $\left[-\frac{5}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (b) **[0.3 val.]** Estude a monotonia de f.

   (c) **[0.3 val.]** Indique o contradomínio de f.

   (d) **[0.3 val.]** Esboce o gráfico da função f.

2. **[0.6 val.]** Considere as funções f e g seguintes:

$$\begin{array}{rcl} f :]-\infty, 0] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -(x-3)^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -(x-3)^2 \end{array}$$

   (a) **[0.3 val.]** Mostre, justificando, que uma destas funções é injectiva e que a outra não o é.

   (b) **[0.3 val.]** Caracterize a função inversa da função injectiva.

3. **[0.9 val.]** Considere a funcão

$$f(x) = \frac{x^2(x-2)\cos(e^x)}{x^3 - 4x}$$

   definida no seu domínio e calcule os seguintes limites

   (a) **[0.3 val.]** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

   (b) **[0.3 val.]** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

   (c) **[0.3 val.]** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

4. **[0.4 val.]** Mostre que a função

$$\begin{array}{rcl} h :]-1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x + x\ln(x+1) + (x-1) \end{array}$$

   tem pelo menos duas raízes, uma à direita e outra à esquerda de $x = 0$.

5. **[0.9 val.]** Considere a seguinte sucessão:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 1} \quad \text{para} \quad \text{n} = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

(a) **[0.3 val.]** Prove que x_n é uma sucessão crescente.

(b) **[0.3 val.]** Prove que $x_n \leq 4, \ \forall n = 0, 1, 2....$

(c) **[0.3 val.]** Prove que x_n é convergente e calcule o seu limite.

FIM