21166 - História da Matemática

Ano lectivo 2020/21

Docente: António Araújo

e-fólio A (6 a 13 de janeiro)

,

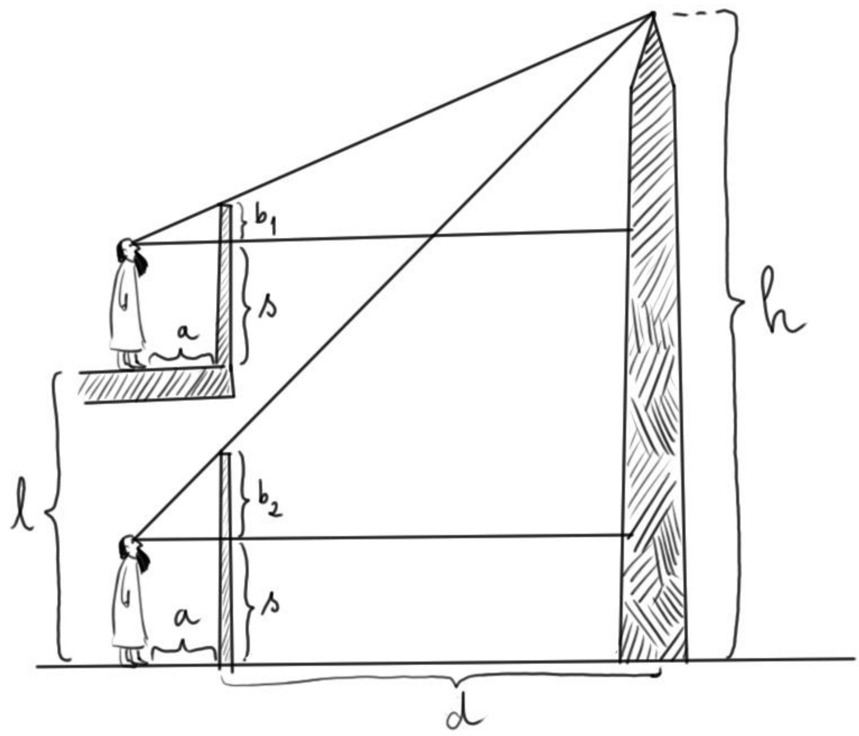
Para a resolução do e-fólio, aconselha-se que:

- Verifique se o ficheiro que recebeu está correcto. O e-fólio consiste de 1 página com 3 problemas e termina com a palavra FIM.
- **A resolução deve ser inteiramente manuscrita.** Como o e-fólio tem um tempo prolongado de resolução, espera-se que as respostas que enviar estejam impecavelmente legíveis, com boa apresentação e organização. Deve fazer à parte o trabalho auxiliar e enviar apenas uma versão final, "limpa". Deve digitalizar ou fotografar a sua resolução de forma legível, e entregar de preferência em pdf, embora se aceitem scans ou fotografias em jpeg ou png. Se usar varios ficheiros envie apenas um arquivo com todos eles, em rar ou zip. Respostas ilegíveis não serão cotadas, por isso verifique bem o seu ficheiro antes de enviar.
- Justifique cuidadosamente todas as suas respostas. Apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio.
- Tenha em atenção o prazo de entrega do e-fólio e as indicações para submeter a resolução disponibilizadas na sala de aulas virtual.
- O e-fólio é um trabalho individual. Pode utilizar recursos externos (pesquisa online, literatura, etc) mas não pode pedir ajuda a terceiros nem discutir os problemas com os seus colegas.

Critérios de avaliação e cotação:

- Este e-fólio tem a cotação total de 4 valores. Todos os problemas têm a mesma cotação.

Problema 1. *Liu Hui avista o topo de uma coluna a partir de dois patamares distintos de uma casa. Alinhando o topo da coluna com duas varas de medição (ver figura) obtém as medidas b_1 e b_2. Seja s a altura dos seus olhos acima do solo, l a altura do segundo patamar em relação ao primeiro, a a distância até à vara de medição, d a distância horizontal até ao topo da coluna e h a altura da coluna. Sabendo l,a,b_1,b_2, e s, determine d e h.*



Solução:
Consideramos a semelhança de triângulos,

$$\begin{cases} \dfrac{b_2}{a} &= \dfrac{h-s}{a+d} \\ \dfrac{b_1}{a} &= \dfrac{h-l-s}{a+d} \end{cases}$$

Subtraindo a segunda à primeira equação obtemos

$$\frac{b_2 - b_1}{a} = \frac{l}{a+d}$$

de onde tiramos

$$d = \frac{al}{b_2 - b_1} - a \tag{1}$$

Da primeira equação do sistema tiramos

$$h = s + (a+d)\frac{b_2}{a}$$

Substituindo a expressão obtida para d, obtemos

$$h = s + \frac{lb_2}{b_2 - b_1}$$

Problema 2. *Usando os lemas de Brahmagupta, obtenha duas soluções inteiras não triviais para a equação* $79x^2 + 1 = y^2$.

Solução: Procuramos uma solução aproximada. Escolhendo $(a, b) = (1, 9)$ obtemos uma solução para $79x^2 + 2 = y^2$. Então pelo primeiro lema de Brahmagaupta (com $k = k' = 2$ e com ambas as soluções iguais a (a, b)), temos que (com $n = 79$), $(2ab, b^2+na^2) = (18, 160)$ é solução de $79x^2+4 = y^2$. Mas então pelo segundo lema, $(a', b') = (18/2, 160/2) = (9, 80)$ é solução de $79x^2 + 1 = y^2$. Aplicando de novo o primeiro lema a (a', b') com $k = k' = 1$, temos que $(2a'b', b'^2 + na'^2) = (1440, 12799)$ é outra solução de $79x^2 + 1 = y^2$.

Problema 3. *Encontre uma raíz real da cúbica*

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

pelo método de Tartaglia-Cardano. Recorde que deve começar por colocar a equação numa forma adequada.

Solução:

Em geral, podemos eliminar o termo quadrático de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com a transformação $x \mapsto y - \dfrac{b}{3a}$. Neste caso, com $a = 1, b = 2$, fazemos $x \mapsto y - 2/3$. Fazendo a substituição, obtemos a equação

$$y^3 + \frac{26}{3}y = \frac{704}{27}.$$

que está na forma $y^3 + py = q, p, q > 0$, pelo que podemos aplicar a fórmula de Cardano para obter uma solução igual a

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{704}{54} + \sqrt{\left(\frac{704}{54}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{704}{54} + \sqrt{\left(\frac{704}{54}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^3}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{352}{27} + 2\sqrt{\frac{1310}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{352}{27} + 2\sqrt{\frac{1310}{3}}} \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{352 + 6\sqrt{3930}} - \sqrt[3]{-352 + 6\sqrt{3930}}\right)
\end{aligned}
$$

Finalmente, $x = y - \frac{2}{3}$, é solução da cúbica original, ou seja

$$
x = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{352 + 6\sqrt{3930}} - \sqrt[3]{-352 + 6\sqrt{3930}} - 2\right)
$$

FIM