Exame | Folha de resolução de exame

Elementos de Probabilidade e Estatística | 21037

Período de Realização | 8 de junho de 2022

Data de Limite de Entrega | 8 de junho de 2022, das 10:00 às 13:00 horas (tolerância incluída) de Portugal Continental. O dispositivo encerra às 13:00 horas de Portugal Continental.

Conteúdos | Tema 1: Dados Estatísticos. Tema 2: Probabilidades; Tema 3: Variáveis Aleatórias; Tema 4: Variáveis Aleatórias Discretas; Tema 5: Variáveis Aleatórias Contínuas.

Objetivos | Os objetivos do Exame incidem sobre os objetivos dos Temas 1, 2, 3, 4 e 5.

Recursos | O Exame é um trabalho individual. Pode utilizar os recursos da unidades curricular fornecidos pelo docente mas não deve pedir ajuda a terceiros nem discutir os problemas com os colegas.

Critérios de avaliação e cotação | A cotação total deste Exame é de 20 valores distribuídos do seguinte modo:

Questão	1	2	3	4	5	6
Cotação	3.0	3.0	3.0	4.0	3.0	4.0

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios:

1. correção científica das respostas;
2. capacidade de escrever clara, objectiva e corretamente;
3. capacidade de estruturar logicamente as respostas;
4. capacidade de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

Normas a respeitar

1. Durante o período do Exame não está autorizada a colocação de mensagens nos fóruns. Este período corresponde a um momento apenas vosso para a resolução do Exame.
2. O prazo de submissão do Exame é para ser cumprido e não existirá qualquer exceção. Um Aluno que não submeta o Exame no prazo devido não será avaliado.

3. A submissão do Exame apenas pode ser realizada no dispositivo próprio da sua turma. Não são aceites Exames por e-mail.

4. O Exame é para resolver de forma individual. Não pode pedir ajuda a terceiros nem discutir os problemas com os colegas.

5. Deve redigir o seu Exame na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho, repetindo a segunda página as vezes que forem necessárias.

6. Pode escrever no computador ou à mão, neste caso com letra legível.

7. Espera-se que as respostas sejam apresentadas com letra legível, com boa apresentação e organização. Todas as questões com letra ilegível ou impercetível serão cotadas com 0 (zero) valores. Se considera ter uma letra pouco legível, resolva o Exame no computador.

8. Deve fazer à parte o trabalho de rascunho e enviar apenas a versão final "limpa", embora com todos os cálculos e justificações necessárias. Respostas ilegíveis não serão cotadas, pelo que deve verificar com atenção antes de enviar.

9. Respostas sem cálculos ou sem a apresentação das fórmulas/expressões utilizadas serão cotadas com zero valores.

10. Deve apresentar as respostas pela mesma ordem das perguntas e deve numerar todas as páginas do documento.

11. Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da palavra “Exame” e código da unidade curricular, segundo o exemplo apresentado:

    `123456Exame21037.pdf`.

12. O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB e deve ser entregue em formato PDF (Portable Document Format). Utilizadores do sistema operativo Windows podem usar o programa PDFCreator (`https://www.pdfforge.org/pdfcreator/download`). Restantes utilizadores já têm incorporado um exportador para PDF.

13. Deve carregar o referido ficheiro (um e apenas um) para a plataforma no dispositivo Exame até à data e hora limite de entrega.

14. Evite a entrega próxima da hora limite para se precaver contra eventuais problemas. Não existe a possibilidade de entregar o Exame depois da data terminar. O Exame é entregue obrigatoriamente no dispositivo da sua turma, não podendo ser enviado de outro modo.

15. **O incumprimento de pelo menos uma destas normas terá como consequência a anulação do Exame e a cotação será 0 (zero) valores**.

Votos de bom trabalho!

Nuno M. Brites.

Trabalho a desenvolver (Enunciado do Exame)

1. No seu percurso habitual para a escola, um estudante passa por dois semáforos de funcionamento independente. A probabilidade de cada um dos semáforos estar “verde", para ele, é de 0.4 para o primeiro e 0.5 para o segundo. Atendendo à hora de saída habitual, e sem outros contratempos, nos dias ditos “normais” ele só chega à escola a tempo do primeiro toque para as aulas, se pelo menos um dos semáforos estiver “verde”. Num dia em que o estudante chegou à escola antes do primeiro toque qual a probabilidade de ter apanhado somente um dos semáforos “verdes”?

2. Calcule o valor de k de modo que a função $f(x) = k/5^x$, com $x \in \mathbb{N}$, defina uma função probabilidade de uma variável aleatória X.

3. Seja X uma variável aleatória com função densidade definida por

$$f(x) = \frac{e^{-x/3}}{3}, \quad x > 0.$$

   Obtenha a função geradora dos momentos e, com base nela, calcule a média e a variância de X.

4. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com variâncias σ_X^2 e σ_Y^2 , respectivamente. Sendo $Z = X + Y$ e $W = X - Y$, determine $\rho_{Z,W}$.

5. O montante de depósitos à ordem efetuados diariamente, em certa agência bancária, é aleatório com distribuição normal de média 120 unidades monetárias e variância 64. Determine o limite inferior do montante de depósitos que se verifica em 90% dos dias.

6. Considere n variáveis aleatórias, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, cada uma com distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda > 0$, e ainda a variável aleatória

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(X_i - 1).$$

   Determine o valor esperado de Y.

FIM.

TABELA 4 – DISTRIBUIÇÃO NORMAL – Função de distribuição

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

TABELA 5 – DISTRIBUIÇÃO NORMAL: $\Phi^{-1}(z)$

ε	.0005	.0010	.0050	.0100	.0200	.0250	.0500	.1000	.2000	.3000	.4000
z_ε	3.290	3.090	2.576	2.326	2.054	1.960	1.645	1.282	.842	.524	.253
$z_{\varepsilon/2}$	3.481	3.290	2.807	2.576	2.326	2.241	1.960	1.645	1.282	1.036	.842

$$z_\varepsilon : P(Z > z_\varepsilon) = \varepsilon\,; \quad z_{\varepsilon/2} : P(|Z| > z_{\varepsilon/2}) = \varepsilon\,.$$