U.C. 71061

Curso de Qualificação para Estudos Superiores - Matemática

12 de março de 2014

Critérios de avaliação:

- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efectuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.
- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.

Correcção Sumária

Nas páginas seguintes, a sugestão de uma sequência de resolução para uma determinada questão deve ser interpretada como uma das sequências possíveis. Será atribuída cotação análoga se, em alternativa, for apresentada outra, igualmente correcta.

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

1. (**P-fólio**: 4,0 valores)

1.1. (**P-fólio**: 2.0 valores)
A primeira linha do Quadro I fica preenchida se se notar que $F_1 = f_1$ e que, por definição de frequência relativa, $f_1 = \frac{n_1}{N}$, $N = 160$ (número total de casais inquiridos com filhos). Assim,

$$F_1 = f_1 = \frac{40}{160} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Sendo $F_2 = F_1 + f_2 = f_1 + f_2$, resulta que

$$f_2 = 0.55 - 0.25 = 0.30,$$

pelo que $n_2 = f_2 N = 0.3 \times 160 = 48$. Fica assim completa a segunda linha.
Para a terceira linha, tem-se

$$f_3 = \frac{n_3}{N} = \frac{32}{160} = \frac{2}{10} = 0.2$$

e $F_3 = F_2 + f_3 = 0.55 + 0.2 = 0.75$.
Como $F_4 = 1$, para completar o Quadro I falta só o valor $n_4 = f_4 N = 0.25 \times 160 = 40$. O Quadro I fica assim completo:

Nº de filhos	n_i	f_i	F_i
1	40	**0.25**	**0.25**
2	**48**	**0.30**	0.55
3	32	**0.2**	**0.75**
4	**40**	0.25	**1**

1.2. (**P-fólio**: 0.5 valor)
De acordo com o Quadro I, entre os casais inquiridos, 48 ($= n_2$) têm 2 filhos, 32 ($= n_3$) têm 3 filhos e 40 ($= n_4$) têm 4 filhos. Ou seja, entre os casais inquiridos $48 + 32 + 40 = 120$ têm pelo menos dois filhos.

1.3. (**P-fólio**: 1.50 valor)
Observando a coluna das frequências absolutas simples n_i do Quadro I, verifica-se que o maior valor é 48$= n_2$. Deste modo, a moda do número de filhos por casal é 2.

Para o cálculo da mediana comece-se por observar que o número de casais inquiridos, 160, é um número par. Ordenando os 160 dados por ordem crescente de número de filhos (não é necessário fazê-lo explicitamente) os dois elementos médios da colecção de dados correspondem aos dados com as ordens 80 e 81. (Estas ordens podem ser obtidas pelos cálculos $\frac{160}{2}$ e $\frac{160}{2} + 1$.)
Consultando a segunda coluna do Quadro I, verifica-se que $n_1 = 40$ (inferior a 81 e a 80) e que $N_2 = n_1 + n_2 = 40 + 48 = 88$. Assim, os elementos de ordem 80 e 81 correspondem ambos a dois filhos por casal. A mediana é então igual ao valor da semi-soma $(2 + 2)/2 = 2$.

2. (**P-fólio**: 2,0 valores)

Para que o numerador da expressão dada faça sentido tem que se ter $x - 3 \geq 0$, ou seja, $x \geq 3$. Por outro lado, para que o denominador tenha sentido, este nunca pode ser nulo: $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2) \neq 0$. Para que tal aconteça, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$. Logo, o domínio de f é igual ao conjunto

$$[3, +\infty[\, \cap \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} = \,]3, +\infty[\,.$$

3. (**P-fólio**: 2,0 valores) Exercício 34.6 do tema Limites e Continuidade.

Sendo

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \times \frac{1}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{1}{\cos x}$$

e

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

resulta que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\times 1=1.$$

4. (**P-fólio**: 2,0 valores) Exercício 6 sobre Limites e Continuidade.

Este exercício resolve-se por aplicação da Proposição 47 (Teorema de Weierstrass) do texto de apoio ao tema Limites e Continuidade. Para o efeito, basta provar que a função g dada é contínua no intervalo $[-2,2]$.

Para tal, comece-se por notar que $x\mapsto x^2-3x$, $x\mapsto 2-4x$, $x\mapsto x$ são polinómios e, portanto, são aplicações contínuas em $\mathbb{R}$. Daqui resulta que:

- g é contínua em $]-\infty,1[$, por nesse intervalo coincidir com a função $x\mapsto x^2-3x$;

- Sendo $x\mapsto\frac{2-4x}{x}$ contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (quociente de duas funções contínuas), a função g é contínua no intervalo $]1,+\infty[$.

Para se concluir a continuidade de g no intervalo $[-2,2]$ (ou, mais geralmente, em $\mathbb{R}$), resta agora verificar a continuidade de g no ponto 1. Tem-se,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} g(x) &= \lim_{x\to 1^-} x^2-3x=-2,\\ \lim_{x\to 1^+} g(x) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{2-4x}{x}=-2,\end{aligned}$$

pelo que

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^+} g(x)=-2=g(1).$$

Fica assim provada a continuidade de g no intervalo $[-2,2]$. Por aplicação da referida Proposição 47, podemos então concluir que a função g tem um máximo e um mínimo no intervalo $[-2,2]$.

5. (**P-fólio**: 2,0 valores)

Por aplicação da regra da derivada da função composta, tem-se

$$h'(x)=-\operatorname{sen}(\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1})'=-\frac{x\operatorname{sen}(\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}.$$