21002 - Álgebra Linear I

Ano lectivo 2015/16

Docente: António Araújo

e-fólio B (8 a 18 de janeiro)

Para a resolução do e-fólio, aconselha-se que:

- Verifique se o ficheiro que recebeu está correcto. O e-fólio consiste de 5 grupos de questões e termina com a palavra FIM.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um único documento digital (em formato pdf), incluindo obrigatoriamente esta folha de rosto e a página com as questões de escolha múltipla, e insira-o, na página moodle da sua turma, em "e-Fólio B" até ao dia limite referido no topo desta página.
- Justifique cuidadosamente todas as suas respostas. Apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Assegure-se de que o seu trabalho está legível.
- Recorde que o e-fólio é um trabalho individual.

Critérios de avaliação e cotação:

- Este e-fólio tem a cotação total de 4 valores. Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0.25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores. Os Grupos II a V têm cotações de 0.6, 0.85, 0.7, 0.85 respectivamente.

Por favor preencha os seus dados:

- Nome:
- B.I:
- N^{o} de Estudante'
- Curso:

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

I. Questões de escolha múltipla.

1. Considere as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x,|y|,z) \\ g(x,y,z) &= (xy,yz,zx) \\ h(x,y,z) &= 2^{x+y+z} \end{aligned}$$

☐ a) Apenas f e g são lineares.
☐ b) Apenas f e h são lineares.
☐ c) Apenas uma das aplicações é linear.
☐ d) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

2. Considere em $\mathbb{R}^2$ a base $\mathcal{B} = ((2,1),(1,1))$ e a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

quando se toma no espaço de partida e no espaço de chegada as bases canónicas respectivas.

Então, quando se toma no espaço de partida a base canónica e no espaço de chegada a base $\mathcal{B}$, a aplicação T é representada pela matriz

☐ a)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

☐ b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

☐ c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

☐ d) Nenhuma das anteriores.

3. Considere as seguintes aplicações com domínio em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$f(A) = \det A$$
$$g(A) = tr(A)$$
$$h(A) = A^T$$

☐ a) f, g, e h são aplicações lineares.
☐ b) Apenas f e g são lineares.
☐ c) g e h são endomorfismos.
☐ d) dim Nuc g $= n^2 - 1$.

4. Considere a aplicação linear definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & a \\ c & b \end{bmatrix}.$$

Então
☐ a) 1 é valor próprio de f com multiplicidade geométrica 2.
☐ b) 1 é valor próprio de f com multiplicidade geométrica 1.
☐ c) 1 não é valor próprio de f.
☐ d) 2 é valor próprio de f.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II.

Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) e c) seguintes, justificando a resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

Seja $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que o seu polinómio característico é $p(z) = z^3 - 3z^2 + 2z$. Então:

a) dim Nuc(A)$= 0$.

b) A é uma matriz invertível.

c) A é diagonalizável.

III. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{cases} f(0,1,1) = (-1,0,1) \\ f(1,0,1) = (1,-1,0) \\ f(1,1,0) = (0,1,-1) \end{cases}$$

a) Determine a expressão geral de f.

b) Determine a matriz $A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$ que representa f em relação à base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ na partida e na chegada.

c) Defina os subespaços Nuc f e Im f. Determine uma base para Nuc f e determine uma base para Im f.

d) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base de Im f.

IV. Considere as bases de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Obtenha a matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$.

V. Considere o endomorfismo linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dado por

$$T(A) = A^T,$$

que transforma uma matriz na sua transposta.

a) Determine a matriz $\mathcal{M}(T;\mathcal{B},\mathcal{B})$ onde

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

b) Calcule os valores próprios de T e os respectivos espaços próprios.

c) Determine uma base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ em que $\mathcal{M}(T;\mathcal{B}',\mathcal{B}')$ seja diagonal, e calcule $\mathcal{M}(T;\mathcal{B}',\mathcal{B}')$.

FIM