# e-Fólio A

Nome: ……………………………………………………………………………………….

B.I.: ……………………………. Nº. de estudante: ………………………………………..

Licenciatura: ……………………………………………………………………………..

Unidade Curricular: Cálculo para Informática    Código: 21157

Data: …………….                                        Ano lectivo: 2015/16

Docente: Luís Gonzaga Albuquerque        Classificação: ………………………………..

PARA A RESOLUÇÃO DO e-FÓLIO A, ACONSELHA-SE QUE:

- Preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-fóilo A é composto por sete grupos de problemas, num total de duas páginas e termina com a palavra FIM. As suas respostas aos problemas deste e-fólio não podem ultrapassar doze páginas; páginas adicionais não serão classificadas.
- Escreva com letra legível ou usando um processador de texto matemático conveniente.
- Depois de ter realizado o e-fólio produza um único documento digital ( de preferência pdf ) que deve incluir esta folha de rosto e insira-o na página moodle da unidade curricular em e-fólio A até às 23h55 do dia 23 de Novembro.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- A cotação total deste e-fóilo é de 4 valores.
- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, a correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Para resolver os problemas do e-fólio deve usar os resultados do manual que correspondem a esta parte da matéria ou dos textos complementares se usar outro tipo de resultados deve fazer a respectiva prova.
- Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que usar na resolução dos problemas.

1 Prove que quando $x \to 0$ $sen(x) \sim \mathrm{x} - \frac{x^3}{6}$

Temos que provar que $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x - \frac{x^3}{6}} = 1$ ora $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x - \frac{x^3}{6}} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)} = 1$ uma vez que

$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)} = 1$

2 Calcule $\lim_{n\to +\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$ ora para $k = 0, \cdots n$ $\sqrt{n} \le \sqrt{n+k} \le \sqrt{n+n}$

logo $\frac{n+1}{n^2\sqrt{2n}} \le \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \le \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}}$

vamos analisar os limites $\lim_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}}$, $\lim_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{2n}}$ (ver proposição 5 pág 41 do manual)

$\lim_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}} = \lim_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n\to +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0$ pois $\lim_{n\to +\infty} n\sqrt{n} = +\infty$

e $\lim_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ $\lim_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{2n}} = \lim_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n\to +\infty} \frac{1}{n\sqrt{2n}} = 0$ pois $\lim_{n\to +\infty} n\sqrt{2n} = +\infty$

e $\lim_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ ou seja pelo teorema das sucessões enquadradas tem-se que

$\lim_{n\to +\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n+n}}\right) = 0$

3 Calcule $\lim_{n\to +\infty} n\left(\frac{1}{e}\right)^n$

Vamos usar o ex 2 da 1ª actividade formativa

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{1}{e}\right)^{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{1}{e}\right)}{n}=\left(\frac{1}{e}\right)<1 \text{ pois } \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

logo $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{e}\right)^{n}=0$

4 Calcule $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5+\sqrt{n^4}+100n^3}{6^n+3^n+n}$

$\sqrt{n^4}==n^2=o(n^5)$ pois $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}=0$ e $100n^3=o(n^5)$

pois $\lim_{n\to+\infty}\frac{100n^3}{n^5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{100}{n^2}=0$ logo quando $n\to+\infty$ $n^5+\sqrt{n^4}+100n^3\sim n^5$ por outro lado $3^n=o(6^n)$ pelo exercício 5 da 1ª actividade formativa e $n=o(6^n)$ pelo exercício 4 da 1ª actividade formativa logo $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5+\sqrt{n^4}+100n^3}{6^n+3^n+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5}{6^n}$ e de novo pelo exercício 4 da 1ª actividade formativa l tem-se $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5}{6^n}=0$

5 Calcule $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}\right)=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}\right)\left(\sqrt{(n+2)(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}\right)}{\left(\sqrt{(n+2)(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}\right)}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+3n+2-n^2+n}{\left(\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2-n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n+2}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n+2}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(4+\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} = \frac{4}{2} = 2$$

6 Prove que a função $f(x) = x^{10} + x^4 - 1$ tem pelo menos duas raízes.

$f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = f(-1) = 1 > 0$ como a função $f$ é contínua pelo teorema de Bolzano (Ver manual pág 62) a função tem pelo menos uma raiz no intervalo $]-1,0[$ e outra no intervalo $]0,1[$

7 Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{x} - \frac{x^3}{6}}{e^x - 1}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{x} - \frac{x^3}{6}}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\mathrm{x} - \frac{x^3}{6}}{x}}{\frac{e^x - 1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{6}}{\frac{e^x - 1}{x}} = 1$$ uma vez que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ e

$$\lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) = 1$$

FIM