Investigação Operacional | 21076

Enunciado

1. (1.0 val.)

A fábrica de móveis do Sr. António produz, entre outras coisas, mesas e secretárias. Na produção das mesas e secretárias são usadas duas máquinas, A e B, cada uma trabalhando um máximo de 720 e 880 horas mensais, respectivamente.
Os tempos de uso de cada máquina para produção unitária de cada um destes móveis é apresentado na tabela abaixo.

	Máquina A (horas)	Máquina B (horas)
Mesas	2	4
Secretárias	4	4

Estima-se que o lucro unitário será de 150 euros por secretária e 100 euros por mesa. Formalize o problema de programação linear que maximize o lucro mensal.

Resolução:
Variáveis de decisão:
X: quantidade de mesas (em unidades) produzidas mensalmente;
Y: quantidade de secretárias (em unidades) produzidas mensalmente.

Função objetivo, a maximizar:

$$F(X, Y) = 100X + 150Y$$

Restrições:
$2X + 4Y \leq 720$ condição no número máximo de horas mensais de produção da máquina A
$4X + 4Y \leq 880$ condição no número máximo de horas mensais de produção da máquina B
$X, Y \geq 0$ condições de não negatividade.

Assim, o problema formaliza-se como:

$$\max F = 100X + 150Y$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} 2X + 4Y \leq 720 \\ 4X + 4Y \leq 880 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

2. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\max F = 2X + 2Y$$

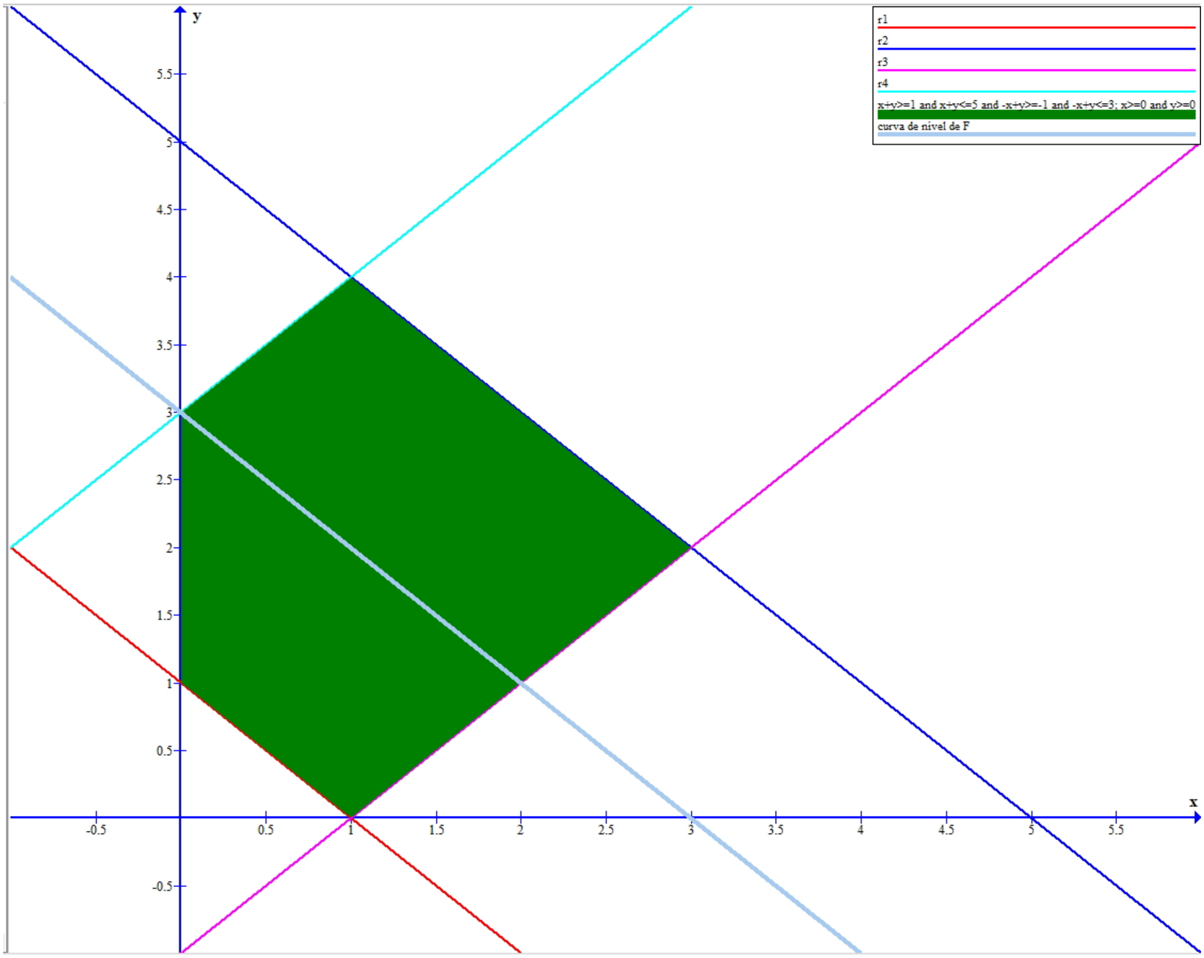
sujeito a

$$\begin{cases} X + Y \geq 1 \\ X + Y \leq 5 \\ -X + Y \geq -1 \\ -X + Y \leq 3 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

a) (1.0 val.) Desenhe o polígono admissível e resolva o problema pelo método gráfico. O que aconteceria à solução óptima se a função objetivo fosse substituída pela função com a seguinte expressão?

$$\max F(X,Y) = X + 2Y$$

Resolução:
A reta $X + Y = 1$ passa nos pontos $(0,1)$ e $(1,0)$.
A reta $X + Y = 5$ passa nos pontos $(0,5)$ e $(5,0)$.
A reta $-X + Y = -1$ passa nos pontos $(0,-1)$ e $(1,0)$.
A reta $-X + Y = 3$ passa nos pontos $(0,3)$ e $(-3,0)$.



As retas de nível da função F são dadas pelas retas $2X + 2Y = z$ para algum $z \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$Y = -X + \frac{z}{2}.$$

Assim, o valor da função F aumenta à medida que aumenta o valor de z. Como se pode ver na figura acima, as curvas de nível são paralelas à recta $r_2 : \ X + Y = 5$, logo o valor óptimo é atingido nessa recta entre os pontos $(1, 4)$ e $(3, 2)$. Assim, os pontos óptimos são dados por

$$(X^*, Y^*) = (1 - \lambda)(1, 4) + \lambda(3, 2)$$

com $F^* = F(X^*, Y^*) = 10$.

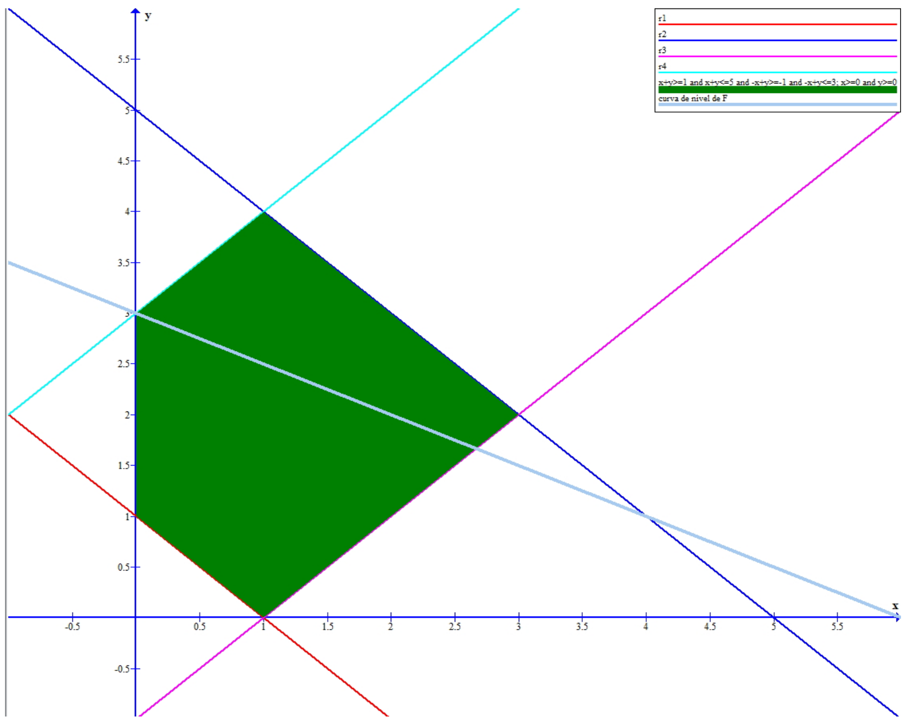
Se a função objectivo fosse $F(X, Y) = X + 2Y$, então as curvas de nível seriam as rectas com equação $X + 2Y = z$ com $z \in \mathbb{R}$, ou seja, $Y = -\frac{1}{2}X + \frac{z}{2}$, aumentando o valor de F à medida que o valor de z aumenta. Pela figura abaixo, coma as novas curvas de nível, percebe-se que o valor máximo de F é atingido na intersecção das rectas correspondentes às duas restrições:

$$\begin{cases} X + Y = 5 \\ -X + Y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 5 - X \\ -X + 5 - X = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = 5 - X \\ -2X = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 5 - X \\ X = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = 4 \\ X = 1 \end{cases}$$

Assim, o valor máximo é atingido no ponto (1,4), ou seja, quando $X = 1$ e $Y = 4$, sendo o valor máximo igual a $F(1, 4) = 10$.



b) (1.5 val.) Resolva o problema (com $\max F(X, Y) = 2X + 2Y$) pelo método do simplex, escolhendo uma técnica à sua escolha. Verifique se chegou à mesma conclusão da alínea anterior.

Resolução:
Problema na forma standard:

$$\max F = 2X + 2Y + 0F_1 + 0F_2 + 0F_3 + 0F_4 - M\alpha$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} X + Y - F_1 + \alpha = 1 \\ X + Y + F_2 = 5 \\ X - Y + F_3 = 1 \\ -X + Y + F_4 = 3 \\ X, Y, F_1, F_2, F_3, F_4, \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Vamos resolver pelo método da base artificial

base	X	Y	F_1	F_2	F_3	F_4	α	TI	Δ_i
	1	1	-1	0	0	0	1	1	
F_2	1	1	0	1	0	0	0	5	
F_3	1	-1	0	0	1	0	0	1	
F_4	-1	1	0	0	0	1	0	3	
$-F$	-2	-2	0	0	0	0	M	0	
α	1	1	-1	0	0	0	1	1	1 $\leftarrow$
F_2	1	1	0	1	0	0	0	5	5
F_3	1	-1	0	0	1	0	0	1	1
F_4	-1	1	0	0	0	1	0	3	3
$-F$	$-2-M$	$-2-M$	M	0	0	0	0	$-M$	$(l_5 - Ml_1)$
		$\uparrow$							
Y	1	1	-1	0	0	0		1	
F_2	0	0	1	1	0	0		4	4 ($l_2 - l_1$)
F_3	2	0	-1	0	1	0		2	$(l_3 + l_1)$
F_4	-2	0	1	0	0	1		2	2 ($l_4 - l_1$) $\leftarrow$
$-F$	0	0	-2	0	0	0		2	$(l_5 + (2+M)l_1)$
			$\uparrow$						
Y	-1	1	0	0	0	1		3	$(l_1 + l_4)$
F_2	2	0	0	1	0	-1		2	1 ($l_2 - l_4$) $\leftarrow$
F_3	0	0	0	0	1	1		4	$(l_3 + l_4)$
F_1	-2	0	1	0	0	1		2	2
$-F$	-4	0	0	0	0	2		6	$(l_5 + 2l_4)$
	$\uparrow$								
Y	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		4	$(l_1 + \frac{1}{2}l_2)$
X	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$		1	$(\frac{1}{2}l_2)$
F_3	0	0	0	0	1	1		4	
F_1	0	0	1	1	0	0		4	$(l_4 + l_2)$
$-F$	0	0	0	2	0	0		10	$(l_5 + 2l_2)$

Neste ponto, o algoritmo podia parar, tendo como solução óptima $(X^*, Y^*) = (1,4)$ com $F^* = 10$. No entanto, note-se que F_4 é variável não básica e mesmo assim tem coeficiente 0, logo conclui-se que a solução não é única. Mais: podemos iterar mais uma vez o processo e obter outra solução óptima:

base	X	Y	F_1	F_2	F_3	F_4	α	TI	Δ_i
Y	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		4	8
X	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$		1	
F_3	0	0	0	0	1	1		4	$4 \leftarrow$
F_1	0	0	1	1	0	0		4	
$-F$	0	0	0	2	0	0		10	
						$\uparrow$			
Y	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0		2	$(l_1 - \frac{1}{2}l_3)$
X	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		3	$(l_2 + \frac{1}{2}l_3)$
F_4	0	0	0	0	1	1		4	
F_1	0	0	1	1	0	0		4	
$-F$	0	0	0	2	0	0		10	

Assim, obtemos outra solção óptima: $(X^*, Y^*) = (3,2)$ com $F^* = 10$. Mais uma vez, o método poderia continuar visto que a variável não básica F_3 tem coeficiente 0 em F.

Logo, concluímos que este problema tem solução múltipla dada por

$$(X^*, Y^*) = (1-\lambda)(1,4) + \lambda(3,2)$$

com $F^* = 10$.

3. (0.5 val.) Explique pelas suas próprias palavras a importância da programação linear, enumerando vantagens e limitações.
Indique a bibliografia utilizada.

Resolução:
A Programação Linear é uma técnica utilizada para a afetação económica de recursos, com base num dado critério de otimização. Geralmente, pretende-se optimizar lucros, desempenhos, retorno do investimento, custo, utilidade, tempo, distância, etc, com base nas variáveis de decisão estipuladas. A palavra linear refere-se à relação linear entre as variáveis de decisão do modelo. Assim, uma dada alteração numa variável provoca uma alteração proporcional resultante noutra variável. A palavra programação refere-se à modelação e resolução matemática de um problema que envolve a afetação económica de recursos limitados, escolhendo uma determinada linha de ação ou estratégia entre várias

estratégias alternativas para atingir o objetivo desejado.

Vantagens:

- ajuda a alcançar a utilização óptima dos recursos;
- indica como um decisor pode empregar eficazmente os seus recursos selecionando e distribuindo estes recursos;
- melhoram a qualidade das decisões;
- proporcionam soluções possíveis e práticas, uma vez que podem existir outros constrangimentos a operar fora do problema que devem ser tidos em conta;
- ajuda na reavaliação de um plano básico para a mudança das condições. Se as condições mudarem quando o plano é parcialmente executado, podem ser determinadas de modo a ajustar o resto do plano para obter os melhores resultados.

Limitações:

- necessidade de ter um objectivo claramente identificável e mensurável em termos quantitativos;
- necessidade de ter atividades/restrições claramente identificáveis e mensuráveis em termos quantitativos;
- necessidade de ter os recursos para a realização do objetivo também identificáveis e mensuráveis quantitativamente;
- as relações que representam o objectivo como também as considerações de limitação de recursos, representadas pela função objectivo e pelas equações de restrição ou desigualdades, respectivamente, devem ser de natureza linear, o que não é sempre possível;
- deve haver uma série de vias alternativas viáveis de ação à disposição dos decisores, que são determinadas pelas limitações de recursos.

FIM