UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

U.C. 21073

Introdução à Probabilidade e Estatística Bayesianas

1 de Fevereiro de 2016

- INSTRUÇÕES -

- O tempo de duração da prova de exame é de 2 horas, acrescida de 30 minutos de tolerância.
- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível. Após a prova, o enunciado pode ficar na posse do estudante.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- A prova é constituída por 2 páginas e termina com a palavra FIM. Contém ainda uma página de formulário em anexo. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeitos de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Nas questões que envolvam cálculos ou demonstrações o aluno deve explicitar todos os passos necessários.
- É permitido usar máquina de calcular.
- As questões terão as cotações seguintes:

1.	2.	3.	4.	5.
4 val.	4 val.	4 val	4 val	4 val

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter

Problema 1. *Diga, justificando, se o seguinte conjunto de atribuições de probabilidades é internamente consistente:*

$$\begin{aligned} p(A \Rightarrow B|C) &= 0.6 \\ p(A|C) &= 0.5 \\ p(AB|C) &= 0.2 \end{aligned}$$

Problema 2. *Um concurso de televisão consiste no seguinte: São apresentadas três portas fechadas ao concorrente, que tem que escolher uma. Por detrás de uma, e apenas uma, encontra-se o prémio. Suponhamos que o concorrente escolheu a porta número 3. Após essa escolha, e antes da porta ser aberta, o apresentador (que sabe onde está o prémio), abre a porta número 1 e mostra ao concorrente que o prémio não estava lá. Restam portanto apenas a porta 3, que o concorrente escolheu, e a porta 2. O apresentador diz ao concorrente que, se quiser, ele ainda pode mudar a sua escolha da porta 3 para a porta 2. Pergunta: Será que vale a pena mudar de escolha? Quais são as probabilidades so prémio estar atrás de cada uma das portas, antes e depois do apresentador ter aberto a porta 1?*

Problema 3. *Considere o seguinte modelo de Pareto, em que $x_m > 0$ é uma constante real conhecida e $\lambda > 0$ é um parâmetro real desconhecido:*

$$p(x|\lambda, x_m) = \begin{cases} \dfrac{\lambda x_m^\lambda}{x^{\lambda+1}}, & \textit{para } x \geq x_m \\ 0, & \textit{para } x < x_m \end{cases}$$

Mostre que a família Gama(α, β) é família conjugada de priors para o modelo de Pareto com x_m conhecido, e calcule a regra de actualização dos parâmetros α, β.

Nota: Recorde que

$$Gama(\lambda|\alpha, \beta) \propto \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}.$$

Problema 4. *O número de novos autores que em cada ano fiscal conseguem fazer um contrato com uma certa editora é uma variável aleatória que segue uma distribuição Poisson de média θ cuja distribuição a priori é uma Gamma$(\alpha = 15, \beta = 5)$. Sabendo-se que nos últimos 10 anos a editora contratou um total de 44 novos autores determine:*

a) A distribuição a posteriori de θ.

b) A estimação de máxima verosimilhança de θ.

c) O valor de θ para o qual é atingido o máximo da distribuição à posteriori, e o valor médio a posteriori de θ.

Problema 5. *Um sensor óptico mede a distância θ entre dois satélites, com um erro que é Gaussiano, dado por uma distribuição normal de média nula e desvio padrão igual a $\sigma = 3 \times 10^{-3}$ metros. Dito de outra forma, para um objecto a uma distância real de θ metros, a leitura no sensor será de x metros com uma probabilidade dada por $p(x|\theta) = N(x|\mu = \theta, \sigma^2 = 9 \times 10^{-6})$. Suponhamos já antes tínhamos tentado determinar a distância* *ao mesmo alvo utilizando um aparelho com uma margem de erro maior, também gaussiana mas com desvio padrão* $b = 10^{-2}$ *metros. Esse aparelho inicial tinha dado uma leitura de* $a = 105.11$ *metros. Tomando para prior de* θ *a distribuição* $N(\theta|a, b^2)$*, e sabendo que o novo aparelho dá uma medição de 105.099 metros, determine o posterior de* θ*, e uma região de credibilidade a 95% para* θ*.*

FIM

Formulário

Distribuição Exponencial:

$$f(x|\beta) = \frac{1}{\beta}e^{-x/\beta},\ E(f) = \beta, V(f) = \beta^2$$

Distribuição de Poisson

$$f(x|\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad E(f) = V(f) = \lambda$$

Função Gama:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \Gamma(z \in \mathbb{N}) = (z-1)!$$

Distribuição Gama:

$$Gama(\lambda|\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}, \lambda > 0, \quad , E(Gama) = \frac{\alpha}{\beta}, V(Gama) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Função Beta:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, Re(x), R(y) > 0$$

Distribuição Beta:

$$Beta(x|\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

$$E(Beta(\alpha,\beta)) = \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta},\ Var(Beta(\alpha,\beta)) = \tfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$