Matemática Finita | 21082

Período de Realização

Decorre de 5 a 15 de maio de 2023

Data de Limite de Entrega

15 de maio de 2023, até às 23h59 de Portugal Continental

Tema

Teoria de Números

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total deste e-fólio é de 4 valores distribuídos do seguinte modo: 0.25 valores para cada uma das questões de escolha múltipla **1** a **4**; 0.75 valores para cada uma das questões **5** a **8**.
2. Para a avaliação das questões, com exceção das quatro questões de escolha múltipla, constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada. Nas questões **5** a **8** não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Escreva sempre com letra legível.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar **seis** páginas A4.

Depois de ter realizado o E-fólio produza um documento em **formato PDF** e nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioB.pdf

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio B até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 10 MB.

Votos de bom trabalho!

Gilda Ferreira, Mário Bessa, Ana Nunes, Gil Bernardes e José Agapito

Enunciado

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais, uma e só uma é verdadeira. Indique-a.

1. Seja A o conjunto dos inteiros positivos n tais que $n^2 + 1$ é divisível por $n + 1$.

A) A é o conjunto vazio.
B) A tem apenas um elemento.
C) A tem infinitos elementos.
D) Nenhuma das opções anteriores é verdadeira.

2. Seja A o conjunto dos inteiros não negativos n tais que os números $2n + 1$ e $9n + 4$ são primos entre si.

A) A é o conjunto vazio.
B) A tem apenas um elemento.
C) A tem infinitos elementos.
D) Nenhuma das opções anteriores é verdadeira.

3. Considere a expressão:

$$326^2 - 325^2 \equiv k \pmod 3.$$

A) $k = 0$ torna a expressão verdadeira.
B) $k = 1$ torna a expressão verdadeira.
C) $k = 2$ torna a expressão verdadeira.
D) Nenhuma das opções anteriores é verdadeira.

4. Considere a expressão:

$$17^{341} \equiv k \pmod 5.$$

A) $k = 0$ torna a expressão verdadeira.
B) $k = 1$ torna a expressão verdadeira.
C) $k = 2$ torna a expressão verdadeira.
D) Nenhuma das opções anteriores é verdadeira.

Nas perguntas **5.** a **8.** justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. O conjunto $\mathbb{N}$ denota os inteiros positivos.

5. Considere a função

$$\begin{array}{rccl} \Psi\colon & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & \text{mdc}(n+1, n^2+1) \end{array}$$

Mostre que

$$\Psi(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ for par} \\ 2, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

6. Seja $p \in \mathbb{Z}$, $a, b, n \in \mathbb{N}$ e assuma que $p^a \equiv 1 \pmod{n}$ e $p^b \equiv 1 \pmod{n}$. Mostre que:

$$p^{\text{mdc}(a,b)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

7. **a)** Mostre que dado $n \in \mathbb{N}$ temos que $3^{3n} \equiv 1 \pmod{13}$.

b) Mostre usando o método de indução matemática que dado $n \in \mathbb{N}$ temos que $3^{3n+3} - 26n - 27$ é divisível por 169.

8. Indique, justificando, o número de divisores inteiros positivos de 37800 que não são múltiplos de 6.

FIM