ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Período de Realização

Decorre de 23 de novembro a 3 de dezembro de 2108

Data de Limite de Entrega

3 de dezembro de 2108, até às 23h55 de Portugal Continental

Conteúdos

Matrizes. Sistemas de Equações Lineares. Determinantes. Espaços Vetoriais.

Competências

Identificar as principais técnicas, metodologias e ferramentas da Álgebra Linear; Aplicar técnicas de Álgebra Linear para modelar e resolver problemas, nomeadamente saber utilizar matrizes e determinantes.

Trabalho a desenvolver

Recursos

Manual da UC.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

- O primeiro grupo contem questões de escolha múltipla, cuja resposta não necessita de justificação.

A cotação total deste e-fólio é de 4 valores.
Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0.25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores. Os Grupos II a V têm cotação de 0.75 valores cada.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Caso não realize o seu E-fólio por escrito mas num outro formato, preencha igualmente o cabeçalho da Folha de Resolução e declare nela que terminou o seu trabalho até à data e hora determinada pelo professor.

O documento final deverá estar em formato pdf.

Todas as páginas do documento em pdf devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 10 páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.pdf

Deve carregar o referido ficheiro em formato pdf para a plataforma no dispositivo E-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro em formato pdf a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Rafael Sasportes

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

1. Seja $\mathscr{F}$ o espaço vetorial das funções reais de variável real. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathscr{F}$:

$$A = \{f \in \mathscr{F} : f(0) = 0\},$$
$$B = \{f \in \mathscr{F} : f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}\},$$
$$C = \{f \in \mathscr{F} : f(2) = f(3)\},$$
$$D = \{f \in \mathscr{F} : f \text{ é limitada}\}.$$

Então:

☐ **a)** A não é subespaço vetorial de $\mathscr{F}$.

☐ **b)** B é um subespaço vetorial de $\mathscr{F}$.

☐ **c)** C não é subespaço vetorial de $\mathscr{F}$.

☐ **d)** A, C e D são subespaços vetoriais de $\mathscr{F}$.

2. Considere as matrizes A, B e C definidas por

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então

☐ **a)** $AB = \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}$

☐ **c)** $BA = \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}$

☐ **b)** $BC = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}$

☐ **d)** $ABC = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}$

3. Sejam $A, B \in \mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $\det A = 3$ e $\det B = 1$, e considere as seguintes afirmações:

i) $\det(A^2B) = 9$

iii) $\det(3A) = 6$

ii) $\det(2B) = 2$

iv) $\det(BA) = 3$.

Então

☐ **a)** Todas as afirmações são falsas.

☐ **b)**Todas as afirmações são verdadeiras.

☐ **c)** Apenas as afirmações i) e iv) são verdadeiras.

☐ **d)** Apenas as afirmações i) e ii) são verdadeiras.

4. Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Então

- ☐ **a)** A forma de escada reduzida de A é a matriz nula.
- ☐ **b)** A forma de escada reduzida de A é a matriz A.
- ☐ **c)** A forma de escada reduzida de A é a matriz $A^\top$.
- ☐ **d)** A forma de escada reduzida de A é a matriz A^2.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + Nz = N \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$$

onde N representa o seu número de aluno da Universidade Aberta.

1. Verifique (após substituir N pelo seu número de aluno da Universidade Aberta!) que este sistema possui uma solução única.
2. Utilize a Regra de Cramer para calcular z.

III. Considere a matriz

$$A_{x,y} = \begin{pmatrix} x & 1 & y \\ x^2 + xy & x + y & 0 \\ 2x & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Determine em função de x e de y a característica de $A_{x,y}$.

ii) Determine os valores de x e de y para os quais a matriz $A_{x,y}$ é invertível.

iii) Calcule a inversa de $A_{x,y}$ para $x = y = 1$.

IV. 1. Sejam $a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1,2$ e $b_i \in \mathbb{R}, i = 1,2$.

Mostre justificadamente (indicando as propriedades utilizadas) que

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} + b_1 & a_{12} + b_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

2. Sejam $a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, \ldots, n$ e $b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$.

Mostre justificadamente (indicando as propriedades utilizadas) que

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sugestão: Utilize o Teorema de Laplace

V. Seja $A \in \mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ uma matriz invertível tal que $A^3 + A = 0$.

Mostre que $\det A = \pm i$.

FIM