

Nome: .....

B. I.: ..... Nº de Estudante: .....

Curso: ..... Turma: .....

Unidade Curricular: Matemática Finita Código: 21082

Data: ..... Ano Lectivo: 2012/13

Docente: Maria João Oliveira Classificação: .....

O e-Fólio é uma prova TOTALMENTE individual. A suspeita fundamentada de cópia, ou de plágio, é motivo de anulação imediata do mesmo.

### PARA A RESOLUÇÃO DO e-Fólio B, ACONSELHA-SE QUE:

- Imprima este documento (não necessariamente a cores) e preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-Fólio é composto por 6 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra FIM. Responda às questões de escolha múltipla no espaço destinado a esse efeito. As suas respostas às restantes questões não devem ultrapassar 6 páginas.
- Escreva sempre com uma letra legível.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um documento único em **formato PDF**, que inclua esta folha de rosto, a folha das escolhas múltiplas e as suas restantes respostas, e insira-o, na página moodle da unidade curricular, em “e-Fólio B” até ao dia 27 de Maio.

### CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO:

- Com excepção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- A cotação total deste e-Fólio é de 4 valores.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 0.3 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado 0.1 valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões é de 0 valores. A distribuição da cotação é a seguinte:

1-3	ERRADAS				
C	0	1	2	3	
E	0	0.0	0.0	0.0	0.0
R	1	0.3	0.2	0.1	
T	2	0.6	0.5		
AS	3	<b>0.9</b>			

<b>4.</b>	<b>5.</b>	<b>6.</b>
<b>0.5 val.</b>	<b>1.6 val.</b>	<b>1.0 val.</b>

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando  $\times$  no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. A soma

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+i}{i}$$

é igual a:

a)  $\sum_{i=0}^n \binom{n+i}{n-i}$

c)  $\sum_{i=0}^n 2^{n+i}$

b)  $\sum_{i=0}^n \frac{1}{\binom{i}{n+i}}$

d)  $\sum_{i=n}^{2n} \binom{i}{n}$

2. Relativamente ao princípio de indução matemática, considere a seguinte afirmação:

*No processo da demonstração do passo da indução, toma-se um número natural  $n$  arbitrário.*

Esta afirmação é ...

- a) ... falsa: o número natural  $n$  não tem de ser arbitrário
- b) ... verdadeira só no caso do princípio da indução simples
- c) ... verdadeira só no caso do princípio da indução completa
- d) ... verdadeira

3. Relativamente às sucessões  $\langle a_n \rangle$  e  $\langle b_n \rangle$  definidas recursivamente pelo sistema

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + 6b_{n-1} \end{cases}, \quad n \geq 1,$$

e pelas condições iniciais  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 3$ , considere as seguintes afirmações:

- i.  $a_n = \frac{1}{5}(2^{n+2} + 7^n)$ ,  $n \geq 0$
- ii.  $a_n - b_n$ ,  $n \geq 1$ , é um número par

Tem-se que:

- a) Ambas as afirmações são falsas
- b) A afirmação i é verdadeira, mas a afirmação ii é falsa
- c) A afirmação ii é verdadeira, mas a afirmação i é falsa
- d) Ambas as afirmações são verdadeiras

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

4. Por recurso ao **método telescópico** comprove a igualdade provada na questão 5 do E-fólio A, ou seja,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+3)(5+2k)} = \frac{n}{5(5+2n)}, \quad n \geq 1.$$

5.

- 5.1. Por recurso ao **método de indução matemática** prove que, para qualquer constante  $m \geq 1$ , tem-se a igualdade

$$\binom{m+n}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{m+k} = \frac{1}{m}, \quad n \geq 0.$$

- 5.2. Dada uma constante  $\alpha \geq 1$ , determine o valor da soma

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{\binom{\alpha+k}{k}} (-1)^k, \quad n \geq 0.$$

- 5.3. Dado um conjunto  $X \neq \emptyset$ , mostre que

$$\sum_{S \subseteq X} \frac{(-1)^{\#S}}{\#X + \#S} = \frac{(\#X)! (\#X - 1)!}{(2\#X)!}.$$

6. Considere a relação de recorrência

$$2x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

com as condições iniciais  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 1$ .

- 6.1. Determine a solução geral por recurso ao **método do polinómio característico**.  
6.2. Confirme o resultado obtido na alínea anterior.

**FIM**