e-Fólio B

Nome: ……………………………………………………………………………………….

B.I.: ……………………………. Nº. de estudante: ……………………………………..

Licenciatura: ………………………………………………………………………………..

Unidade Curricular: Cálculo para Informática   Código: 21157

Data: …………….   Ano lectivo: 2015/16

Docente: Luis Gonzaga Albuquerque   Classificação: ………………………………..

PARA A RESOLUÇÃO DO e-FÓLIO B, ACONSELHA-SE QUE:

- Preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-fólio B é composto por seis grupos de problemas, num total de duas páginas e termina com a palavra FIM. As suas respostas aos problemas deste e-fólio não podem ultrapassar doze páginas; páginas adicionais não serão classificadas.
- Escreva com letra legível ou usando um processador de texto matemático conveniente.
- Depois de ter realizado o e-fólio produza um único documento digital (de preferência pdf) que deve incluir esta folha de rosto e insira-o na página moodle da unidade curricular em e-fólio B até às 23h55 do dia 18 de Janeiro.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- A cotação total deste e-fólio é de 4 valores.
- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, a correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a respostas não justificadas.

1 Prove que a sucessão x_n tal que $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{4}$ é convergente e calcule o seu limite.

Se $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ então deverá ter-se que $x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ uma vez que $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} x$ (Ver ex1 da 1ª actividade formativa) e $\frac{x_n}{2} + \frac{1}{4} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ pois $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ é uma função contínua. Resolvendo a equação $x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ tem-se $x = \frac{1}{2}$

Se provarmos que $x_n > \frac{1}{2}$ todo o $n \in N$, e que a sucessão x_n é decrescente tem-se que $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}$ uma vez que toda a sucessão decrescente e limitada inferiormente é convergente.

Vamos provar por indução que $x_n > \frac{1}{2}$ para todo o $n \in N$, a propriedade é válida para $n = 1$ pois $x_1 = 1 > \frac{1}{2}$, supondo que $x_n > \frac{1}{2}$ vamos provar que $x_{n+1} > \frac{1}{2}$ ora

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Para provar que a sucessão é decrescente, vamos provar por indução que se tem $x_{n+1} < x_n$ para todo o $n \in N$, a propriedade é válida para $n = 1$ pois $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1 = x_1$ supondo que $x_{n+1} < x_n$ queremos provar que $x_{n+2} < x_{n+1}$ o que acontece pois $x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{2} + \frac{1}{4} < \frac{x_n}{2} + \frac{1}{4} = x_{n+1}$ logo a sucessão dada é convergente e tem como limite o valor $\frac{1}{2}$

2 Seja $f: R \to R$ diferenciável em a calcule $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{af(x)-xf(a)}{x-a}$

$$\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{af(x)+af(a)-af(a)-xf(a)}{x-a}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{a(f(x)-f(a))+f(a)(a-x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a(f(x)-f(a))}{x-a}-f(a)$$ ou seja

$$\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}=af'(a)-f(a)$$

3 Prove que a função $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3}+\dfrac{1}{(x-2)^5}$ tem um e só um zero em R

Tem-se que para $x\in\left]-\infty,1\right[$ $f(x)<0$ e para $x\in\left]2,+\infty\right[$ $f(x)>0$ ou seja a função só pode ter um zero no intervalo $\left]1,2\right[$ por outro lado $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ ou seja $\forall M>0\ \exists\varepsilon>0$ tal que $\forall x\in\left]1,1+\varepsilon\right[$ $f(x)>M$ e $\forall M'<0\ \exists\varepsilon'>0$ tal que $\forall x\in\left]2-\varepsilon',2\right[$ $f(x)<M'$ logo pelo teorema de Bolzano $\exists c\in\left]1,2\right[$ tal que $f(c)=0$ não existindo outros zeros uma vez que

$$f'(x)=-\frac{3}{(x-1)^4}-\frac{5}{(x-2)^6}<0$$ ou seja não se pode anular e se a função tivesse mais do que um zero pelo teorema de Rolle $f'(x)$ deveria anular-se.

4 Dados os números $0 < a_1 < a_2$ determine os máximos e mínimos da função $f(x) = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2$ caso existam

$f'(x) = -2(a_1 - x) - 2(a_2 - x) = 4x - 2(a_1 + a_2)$ logo $f'(x) = 0$ se $x = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$ por outro lado $f''(x) = 4 > 0$ ou seja a função tem um mínimo no ponto $x = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$ sendo o seu valor $2\left(\dfrac{a_1 - a_2}{2}\right)^2$

5 Prove que para $x > 1$ $0 < m < 1$ se tem $\dfrac{m(x-1)}{x^{1-m}} < x^m - 1 < m(x-1)$

Se $f(x) = x^m$ então pelo teorema de Lagrange tem-se

$x^m - 1 = (x-1)mc^{m-1} = (x-1)\dfrac{m}{c^{1-m}}$

em que $1 < c < x$ logo $1^{1-m} < c^{1-m} < x^{1-m}$ e $1 > \dfrac{1}{c^{1-m}} > \dfrac{1}{x^{1-m}}$ donde o resultado.

6 Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x) - x + \dfrac{x^3}{6}}{\log(1 + x^3)sen^2(x)}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log\left(1+x^3\right)}{x^3}=1$ uma vez que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x^3=0$ e $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\log(1+y)}{y}=1$(Ver Regra da Substituição pág 69 do Manual) por outro lado $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen^2(x)}{x^2}=1$ pois

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)}{x}=1$ logo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)-x+\frac{x^3}{6}}{\log\left(1+x^3\right)sen^2(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)+x}{5*4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)+1}{5*4*3x^2}=$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)}{5*4*3*2x}=\dfrac{1}{5!}$ por aplicação da regra de Cauchy

FIM