Correspondências e funções

O principal problema da *combinatória enumerativa* é saber quantos elementos tem um dado conjunto finito. Além disso, dedica-se a encontrar procedimentos e estratégias para a forma de os enumerar e agrupar, e analisa e optimiza tais métodos.

Nem sempre é fácil a contagem dos elementos de um conjunto finito. Muitas vezes, temos de recorrer a outros conjuntos auxiliares, e "compará-los" com o inicial. O objectivo é atingindo quando encontramos um conjunto em que todos os seus elementos possam estar em "correspondência biunívoca" com os do conjunto que queremos estudar.

Correspondência

Sejam A o conjunto de todos os seres humanos e B o conjunto de todos os livros. Consideremos a afirmação

$$\text{“}x \text{ escreveu } y\text{”}.$$

Esta sentença permite relacionar elementos do conjunto A com elementos do conjunto B. Nestas condições se Φ abreviar "escreveu", Φ define uma relação ou uma correspondência de A em B.

Em geral, dados dois conjuntos A e B, dizemos que Φ é uma RELAÇÃO ou CORRESPONDÊNCIA de um conjunto A num conjunto B se

$$x \Phi y$$

é uma setença que relaciona elementos de A com elementos de B; rigorosamente se $\Phi \subseteq A \times B$. A correspondência Φ diz-se BIUNÍVOCA se:

1. Todo o elemento de A está em relação com um único de B:

$$\forall x \in A \, \exists^1 y \in B : x \Phi y$$

2. Todo o elemento de B está relacionado com um único de A:

$$\forall y \in B \, \exists^1 x \in A : x \Phi y$$

Cada uma destas condições pode ser desdobrada em duas:

1a. Todo o elemento de A está em relação com pelo menos um elemento de B:

$$\forall x \in A \, \exists y \in B : x \Phi y$$

1b. Cada elemento de A está em relação, quando muito, com um *único* elemento de B:

$$\forall x \in A \, \forall y_1, y_2 \in B \, (x \Phi y_1 \wedge x \Phi y_2 \Rightarrow y_1 = y_2)$$

2a. Todo o elemento de B está relacionado com pelo menos um elemento de A:

$$\forall y \in B \, \exists x \in A : x \Phi y$$

2b. Cada elemento de B está relacionado, quando muito, com um *único* elemento de A:

$$\forall x_1, x_2 \in A \, \forall y \in B (x_1 \Phi y \wedge x_2 \Phi y \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Note que as condições [1a] e [2a] são condições de *existência*, enquanto que as condições [1b] e [2b] são condições de *unicidade*.

Exemplo 1. Sejam A o conjunto de todos os seres humanos e B o conjunto de todos os livros. Seja Φ a correspondência definida por

$$x\Phi y \Leftrightarrow x \text{ escreveu } y.$$

Então as condições [1a], [1b], [2a] e [2b] podem ser traduzidas, respectivamente, por

1a. Todo o ser humano escreveu pelo menos um livro.
1b. Cada ser humano escreveu, quando muito, um único livro.
2a. Todo o livro foi escrito por pelo menos um ser humano.
2b. Cada livro foi escrito, quando muito, por um único ser humano.

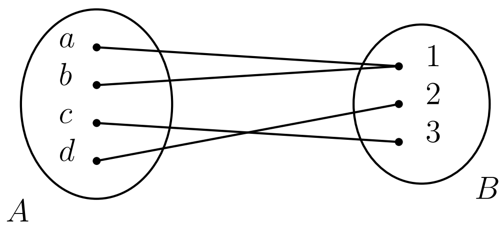
Deste modo, é fácil concluirmos que as condições [1a], [1b] e [2b] falham. Quanto a [2a], tanto quanto se saiba, é verdadeira no mundo real. Portanto Φ não é uma correspondência biunívoca.

Exemplo 2. Sejam A o conjunto de todos os seres humanos e $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Seja Φ a correspondência definida por

$$x\Phi y \Leftrightarrow x \text{ tem } y \text{ anos.}$$

É claro que todo o ser vivo tem um número de anos bem determinado. Portanto verificam-se as condições [1a] e [1b]. Por outro lado, não é conhecida a existência de alguém com, por exemplo, 500 anos. Logo falha [2a]. Também podem existir pessoas distintas com o mesmo número de anos, donde falha [2b]. Portanto Φ não é uma correspondência biunívoca.

Exemplo 3. Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Seja Φ a correspondência de A em B definida pelo diagrama



Quer dizer que

$$\Phi = \{(a, 1), (b, 1), (c, 3), (d, 2)\}.$$

Temos que em Φ, para cada $x \in A$ ocorre um único par ordenado da forma $(x, -)$. Portanto verificam-se as condições [1a] e [1b]. Por outro lado, para todo $y \in B$, ocorre pelo menos um par ordenado da forma $(-, y)$ em Φ. Logo verifica-se [2a]. Mas, como temos, $(a, 1) \in \Phi$ e $(b, 1) \in \Phi$, falha [2b]. Portanto Φ não é uma correspondência biunívoca.

Exemplo 4. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e fixemos um elemento $n \in \mathbb{Z}$. Seja Φ a correspondência de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ definida por

$$x\Phi y \Leftrightarrow y = x + n.$$

Ora, dado $x \in \mathbb{Z}$ existe um elemento em $\mathbb{Z}$ que está em relação com x e é único, é o elemento $x + n$. Logo verificam-se as condições [1a] e [1b]. Por outro lado, dado $y \in \mathbb{Z}$ temos que $y = (y - n) + n$, donde $(y - n)\Phi y$. Como $y - n \in \mathbb{Z}$, verifica-se [2a]. Suponhamos, agora, que $x_1\Phi y$ e $x_2\Phi y$. Então $y = x_1 + n$ e $y = x_2 + n$, donde $x_1 + n = x_2 + n$ e, portanto, $x_1 = x_2$. Logo, também, verifica-se [2b]. Segue-se que Φ é uma correspondência biunívoca de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

Exemplo 5. Fixo um elemento $n \in \mathbb{Z}$, podemos também definir a correspondência Ψ de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$ definida por

$$x\Psi y \Leftrightarrow y = x + n.$$

Tal como no exemplo 4, esta correspondência satisfaz as condições [1a], [1b], [2b]. No entanto, já não satisfaz [2a], pois existem $y \in \mathbb{Z}$ tais que $y - n \notin \mathbb{N}$, pelo que não é uma correspondência biunívoca.

Função

Uma função é um caso particular de uma correspondência. Dizemos que Φ é uma FUNÇÃO de A em B se for uma correspondência de A em B tal que todo o elemento de A está em correspondência com um único de B. Quer dizer que uma função de A em B é exactamente uma correspondência de A em B que verifica as condições [1a] e [1b]. É usual escrever-se $\Phi : A \longrightarrow B$ para denotar uma função de A em B. O conjunto A é designado pelo DOMÍNIO ou CONJUNTO PARTIDA da função Φ, enquanto que B pelo CONTRADOMÍNIO ou CONJUNTO CHEGADA. Além disso, se $x \in A$ então x está em correspondência com um *único* $y \in B$ e dizemos (por não haver ambiguidade) que y é a IMAGEM de x por meio de Φ, escrevendo-se,

$$y = \Phi(x).$$

Assim, nesta nomenclatura, temos que Φ é uma função de A em B se são satisfeitas as condições:

1a. todo o elemento de A tem imagem em B:

simbolicamente: $\boxed{\forall x \in A \ \Phi(x) \in B}$;

1b. o mesmo objecto de A não pode ter duas imagens distintas em B, ou seja não há ambiguidade nas imagens que atribuímos aos elementos de A:

simbolicamente: $\boxed{\forall x \in A \ \forall y_1, y_2 \in B \ (\Phi(x) = y_1 \wedge \Phi(x) = y_2) \implies y_1 = y_2}$.

Também é corrente escrever-se

$$x \overset{\Phi}{\longmapsto} y \quad \text{com o mesmo significado que} \quad y = \Phi(x)$$

ou mais simplesmente, quando não haja confusão em relação a que função nos estamos a referir, $x \longmapsto y$.

Note-se que na notação de conjuntos, se Φ é uma função de A em B então é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$, no qual cada $x \in A$ aparece como 1º termo em um, e somente um, par ordenado de $A \times B$ que é o par $(x, \Phi(x))$, isto é

$$\Phi = \{(x, \Phi(x)) \colon x \in A\} \subseteq A \times B.$$

Exemplo 6. A correspondência do exemplo 2, é uma função do conjunto de todos os seres humanos vivos no conjunto $\mathbb{N}$, uma vez que são verificadas as condições [1a] e [1b].

Exemplo 7. Consideremos a correspondência do exemplo 3 que, como verifica as condições [1a] e [1b], é uma função de A em B. Então podemos escrever $\Phi : A \longrightarrow B$ e temos

$$\Phi(a) = 1, \Phi(b) = 1, \Phi(c) = 3, \Phi(d) = 2.$$

Alternativamente, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Phi \quad : \quad A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto 1 \\ b &\longmapsto 1 \\ c &\longmapsto 3 \\ d &\longmapsto 2. \end{aligned}$$

Exemplo 8. As correspondências dos exemplos 4 e 5 são funções pois ambas satisfazem as condições [1a] e [1b]. Dado um elemento arbitrário $x \in \mathbb{Z}$, a sua imagem por meio de Φ é $x + n$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Phi \quad : \quad \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto x + n, \end{aligned}$$

ou, também, $\Phi = \{(x, x+n) : x \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Do mesmo modo podemos escrever

$$\begin{aligned} \Psi \quad : \quad \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto x + n \end{aligned} \qquad \text{ou} \quad \Psi = \{(x, x+n) : x \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.$$

Igualdade de funções

Dizemos que duas funções são IGUAIS se tiverem igual domínio, igual contradomínio e coincidirem em todos os elementos do domínio. Assim, dadas as funções $\Phi : A \longrightarrow B$ e $\Psi : C \longrightarrow D$ diremos que são iguais, e escreveremos $\Phi = \Psi$, se

(i) $A = C$,

(ii) $B = D$,

(iii) $\Phi(x) = \Psi(x)$ para todo o elemento x do domínio.

Exemplo 9. Consideremos as funções

$$\Phi : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3,4\} \quad ; \quad \Psi : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$$

definidas por

$$\Phi(x) = x + 1 \;\; (x \in \{1,2,3\}) \quad ; \quad \Psi(1) = 2, \Psi(2) = 3, \Psi(3) = 4.$$

Estas funções têm igual domínio, o conjunto $\{1,2,3\}$, igual contradomínio, o conjunto $\{1,2,3,4\}$, e coincidem em todos os elementos do domínio. Logo são iguais e podemos escrever $\Phi = \Psi$.

Exemplo 10. Consideremos as funções Φ, Ψ definidas por

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= x^2 \qquad \text{para } \; 0 \le x \le 1; \\ \Psi(x) &= x^2 \qquad \text{para } \; -1 \le x \le 0. \end{aligned}$$

Embora as regras de correspondência sejam as mesmas as funções são distintas, pois têm domínios distintos.

Exemplo 11. Consideremos a função Φ do exemplo 7. Esta função não é igual à função $\Psi : \{a,b,c,d\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$ definida por

$$\Psi(a) = 1, \Psi(b) = 1, \Psi(c) = 3, \Psi(d) = 2,$$

uma vez que $B \neq \{1,2,3,4\}$ – as funções têm contradomínios distintos.

Função injectiva. Função sobrejectiva. Função bijectiva.

Na definição de função não exigimos que elementos distintos do domínio tivessem imagens distintas. No exemplo 1, temos que $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$ sempre que x_1 e x_2 são duas pessoas com a mesma idade. Também não exigimos que todo o elemento do contradomínio fosse imagem de algum do domínio. No mesmo exemplo, se $y = 500$ então não existe $x \in A$ tal que x tenha 500 anos, ou seja tal que $\Phi(x) = y$. No entanto, existem funções que satisfazem alguma destas condições ou mesmo ambas. Essas funções terão um nome especial.

Sejam A e B dois conjuntos e seja Φ uma função de A em B.

- Dizemos que Φ é uma FUNÇÃO INJECTIVA ou uma INJECÇÃO se sempre que x_1 e x_2 são elementos distintos de A, então as respectivas imagens $\Phi(x_1)$ e $\Phi(x_2)$ são elementos distintos de B. Simbolicamente

  $$\forall x_1, x_2 \in A\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow \Phi(x_1) \neq \Phi(x_2))$$

  ou equivalentemente

  $$\forall x_1, x_2 \in A\ (\Phi(x_1) = \Phi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

- Dizemos que Φ é uma FUNÇÃO SOBREJECTIVA ou uma SOBREJECÇÃO se todo o elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A. Simbolicamente

  $$\forall y \in B\, \exists x \in A : \Phi(x) = y.$$

- Dizemos que Φ é uma FUNÇÃO BIJECTIVA ou uma BIJECÇÃO se for simultaneamente injectiva e sobrejectiva. Simbolicamente

  $$\forall y \in B\, \exists^1 x \in A : \Phi(x) = y.$$

Assim temos que $\Phi\colon A \to B$ é uma função:

- injectiva se Φ for uma correspondência de A em B que verifica [1a], [1b] e [2b].
- sobrejectiva se Φ for uma correspondência de A em B que verifica [1a], [1b] e [2a].
- bijectiva se for uma correspondência biunívoca de A em B.

Exemplo 12. A correspondência do exemplo 2, é uma função mas não é injectiva, pois falha a condições [2b], nem sobrejectiva, pois falha [2a].

Exemplo 13. A correspondência do exemplo 3, é uma função sobrejectiva do conjunto A no conjunto B, pois são verificadas as condições [1a], [1b] e [2a]. No entanto, a função do exemplo 11 não é sobrejectiva, porque falha [2a] - o elemento 4 não é imagem de algum objecto em A.

Exemplo 14. A correspondência Φ do exemplo 8, é uma função bijectiva de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, pois é uma correspondência biunívoca:

2a sobrejectiva: dado $y \in \mathbb{Z}$ temos

$$y = \Phi(x) \iff y = x + n \iff x = y - n \in \mathbb{Z}.$$

Portanto $y = \Phi(y - n)$, com $y - n \in \mathbb{Z}$.

2b injectiva: temos

$$\Phi(x_1) = \Phi(x_2) \iff x_1 + n = x_2 + n \underset{\text{lei do corte}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2.$$

No entanto, a correspondência Ψ é somente uma função injectiva, não é sobrejectiva porque nem sempre $y - n \in \mathbb{N}$.

O que é contar (secção 1.1)

1. Quais das seguintes correspondências Φ são biunívocas? Para as que não forem biunívocas, diga quais são as condições da definição de "correspondência biunívoca" que elas violam.

   (a) Seja S o conjunto dos seres humanos que não são filhos únicos e considere-se Φ a correspondência de S para si próprio definida por: dois seres humanos estão em correspondência Φ se, e somente se, forem irmãos.

   (b) Seja H o conjunto dos homens e seja M o conjunto das mulheres de uma sociedade monogâmica que só permite casamentos heterossexuais. Considere--se a correspondência Φ entre H e M definida por: um homem está na relação Φ com uma mulher se, e somente se, forem casados.

   (c) A correspondência Φ entre $\mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por:

   $$x\Phi(m,n) \quad \text{se, e somente se,} \quad x = \frac{m}{n}\,.$$

2. Descreva uma correspondência biunívoca entre as sequências estritamente crescentes de comprimento 5 constituídas por elementos de [100], e as sequências de 5 números naturais não nulos cuja soma é menor ou igual a 100.

3. Mostre que o número de sequências binárias de comprimento n que contêm exactamente um bloco da forma 01 é igual ao número de soluções naturais da equação $x_1+x_2+x_3+x_4 = n-2$.

4. (a) Indique as partições conjugadas de:
   - $6+4+4+2+1+1$,
   - $8+5+3+2$,
   - $3+3+3+3+2+2+2$,
   - $5+4+4+4+1$.

   (b) Observe nos exemplos anteriores que, se uma partição tem k parcelas, então a sua partição conjugada tem como maior parcela o número k (e vice-versa). Argumente que o número de partições numéricas de n com k parcelas é igual ao número de partições numéricas de n cuja maior parcela é k.

5. Mostre que X e $X \times \{a\}$ têm a mesma cardinalidade.

6. Dê um exemplo de uma função injectiva que não seja sobrejectiva e de uma função sobrejectiva que não seja injectiva.

*7 Seja S o conjunto de todas as sequências de elementos de [6]. Considere $S_6 = \{s \in S\colon \text{a soma de } s \text{ é } 6\}$ e $S_7 = \{s \in S\colon \text{a soma de } s \text{ é } 7\}$. Mostre que

$$\#S_7 = 2\#S_6 - 1.$$

(Isto significa que há quase duas vezes mais maneiras de obter uma soma de 7, quando se vão rolando dados, do que obter uma soma de 6.)

8 A igualdade "$\#(X \cup Y) = \#X + \#Y$" falha se não se exigir que os conjuntos X e Y sejam disjuntos. Aponte, na demonstração que démos desta igualdade, o passo (ou passos) onde se utiliza a hipótese de que X e Y são conjuntos disjuntos.

9 Se $\Phi\colon A \to B$ é uma bijecção, a que é igual $\Phi \circ \Phi^{-1}$? E a que é igual $\Phi^{-1} \circ \Phi$?

10 Duas funções são iguais se, e somente se, tiverem o mesmo conjunto de partida, o mesmo conjunto de chegada e se tiverem os mesmos valores nos mesmos elementos (*critério de identidade de funções*). Dadas três funções $\Phi\colon A \to B$, $\Psi\colon B \to C$ e $\Upsilon\colon C \to D$, mostre que $(\Upsilon \circ \Psi) \circ \Phi = \Upsilon \circ (\Psi \circ \Phi)$.

*11 Seja A um conjunto de pessoas e B o conjunto dos meses do ano. Considere-se a função $\Phi\colon A \to B$ em que, para todo $a \in A$, $\Phi(a)$ é o mês de aniversário de a. A que é igual A_{Junho}? Quando é que pode garantir que há pelo menos três pessoas que fazem anos no mesmo mês?

12 Mostre que num conjunto (finito) com duas ou mais pessoas, há sempre duas que têm exactamente o mesmo número de amigos.
[*Sugestão*: Utilize o teorema dos cacifos.]

*13 Mostre que numa sequência de n^2+1 números naturais distintos, ou há uma subsequência estritamente crescente de comprimento $n+1$, ou há uma subsequência estritamente decrescente de comprimento $n+1$.
[*Sugestão*: Dada uma sequência $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$, faça corresponder a cada $k \in \{1, 2, \ldots, n^2+1\}$ o par (c_k, l_k), onde c_k é o comprimento da maior subsequência estritamente crescente que começa em a_k e l_k é o comprimento da maior subsequência estritamente decrescente que começa em a_k.]

Nota: Os exercícios com * têm um grau de dificuldade mais elevado.

1. **(a)** Não. Consideremos, por exemplo 3 irmãos distintos que designamos por a, b, c.
   - falha [1b]: temos $a\Phi b$ e $a\Phi c$, mas $b \neq c$;
   - falha [2b]: temos $a\Phi c$ e $b\Phi c$, mas $a \neq b$.

   (b) Não, porque existem homens solteiros e mulheres solteiras. Sejam, por exemplo, h um homem solteiro e m um mulher solteira.
   - falha [1a] - como h é solteiro não existe $y \in M$ tal que $h\Phi y$;
   - falha [2a] - como m é solteira não existe $x \in M$ tal que $x\Phi m$.

   (c) Não:
   - falha [1b] - por exemplo $2\Phi(2,1)$ e $2\Phi(4,2)$ porque $2/1 = 2 = 4/2$, mas $(2,1) \neq (4,2)$;
   - falha [2a] - por exemplo $(0,1) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e não existe $x \in \mathbb{Q}^+$ tal que $x = 0/1 = 0$.

2. Alguns esclarecimentos prévios:

   - Uma SEQUÊNCIA é um agrumento ordenado de elementos. Se usamos k elementos dizemos que temos uma sequência de comprimento k:

   $$a_1a_2...a_k.$$

   Duas sequências são iguais se têm igual comprimento e se os elementos na mesma posição são iguais

   $$a_1a_2...a_k = b_1b_2...b_t \iff k = t \wedge a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_k = b_k.$$

   As sequências de comprimento k estão em correspondência biunívoca com os k-uplos:

   $$a_1a_2...a_k \leftrightarrow (a_1, a_2, ..., a_k).$$

   Por exemplo, $s = 1426$ é uma sequência de comprimento 4 e pode ser identificada com o 4-uplo (1,4,2,6).

   - Uma SEQUÊNCIA BINÁRIA é uma sequência formada por "0" e "1". Por exemplo, 1001, 0111011000 são sequências binárias, a primeira de comprimento 4 e a segunda de comprimento 10. Podemos construir uma correspodência biunívoca entre:

   $*$ o conjunto de todas as sequências binárias de comprimento $n = Seq_n$

   $*$ o conjunto dos subconjuntos de um conjunto com $n = \mathcal{P}(\{1,2,...,n\}) = \mathcal{P}([n])$

   e isso prova que os conjuntos Seq_n e $\mathcal{P}(\{1,2,...,n\})$ têm a mesma cardinalidade - ver proposição da página 23 do manual.

No caso deste exercício pretende-se construir uma correspondência biunívoca = função bijectiva entre dois subconjuntos de Seq_5:

$$A = \{s = a_1a_2a_3a_4a_5 \mid 1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 \leq 100\} \subset Seq_5$$

$$B = \left\{ s = b_1b_2b_3b_4b_5 \mid b_i \geq 1\,,\ \sum_{i=1}^{5} b_i \leq 100 \right\} \subset Seq_5$$

Vamos fazê-lo da maneira seguinte: seja $f\colon A \to B$ definida por:

$$s = a_1a_2a_3a_4a_5 \overset{f}{\longmapsto} s' = \underbrace{a_1(a_2-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_3)(a_5-a_4)}_{\text{isto não é um produto, é uma seq. de números}}.$$

Por exemplo, temos:

$$1\,2\,3\,4\,5 \overset{f}{\longmapsto} 1\,1\,1\,1\,1 \ - \ \text{neste caso } a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5$$

$$1\,4\,25\,32\,33 \overset{f}{\longmapsto} 1\,3\,21\,7\,1 \ - \ \text{neste caso } a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 25, a_4 = 32, a_5 = 33$$

$$96\,97\,98\,99\,100 \overset{f}{\longmapsto} 96\,1\,1\,1\,1 \ - \ \text{neste caso } a_1 = 96, a_2 = 97, a_3 = 98, a_4 = 99, a_5 = 100$$

Resta provar que f é uma função bijectiva.

Para provarmos que f é uma função de A em B temos de provar duas condições:

1a. todo o elemento de A tem imagem em B:
Seja $s = a_1a_2a_3a_4a_5 \in A$. Temos

$$a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4) = a_5 \leq 100$$

donde $s' = a_1(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_3) \in B$.

1b. o mesmo objecto não pode ter duas imagens distintas, ou seja que não há ambiguidade nas imagens que atribuímos aos elementos de A:

$$\forall s, s' \in A\ (s = s' \implies f(s) = f(s')).$$

Vamos provar esta condição juntamente com [2b]. De facto, em [2b] temos

$$\forall s, s' \in A\ (f(s) = f(s') \implies s = s').$$

Assim basta provar que

$$\forall s, s' \in A\ (f(s) = f(s') \iff s = s').$$

1b, 2b. Dados quaisquer $s = a_1a_2a_3a_4$, $s' = b_1b_2b_3b_4 \in A$, tem-se

$$f(a_1a_2a_3a_4a_5) = f(b_1b_2b_3b_4b_5)$$

$$\iff a_1(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_3)(a_5 - a_4) = b_1(b_2 - b_1)(b_3 - b_2)(b_4 - b_3)(b_5 - b_4)$$

$$\underset{\substack{\text{por def. de seq.,}\\ \text{elem. na mesma}\\ \text{posição são iguais}}}{\iff} \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 - a_1 = b_2 - b_1 \\ a_3 - a_2 = b_3 - b_2 \\ a_4 - a_3 = b_4 - b_3 \\ a_5 - a_4 = b_5 - b_4 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \\ a_4 = b_4 \\ a_5 = b_5 \end{cases} \underset{\substack{\text{por def. de seq.,}\\ \text{elem. na mesma}\\ \text{posição são iguais}}}{\iff} s = s'.$$

Deste modo, provámos em simultâneo que valem as condições [1b] e [2b]. Como também já provámos [1a], então f é uma função injectiva de A em B.

2a. f é sobrejectiva: Seja $s' = b_1b_2b_3b_4b_5 \in B$. Então

$$1 \leq b_1 < b_1 + b_2 < b_1 + b_2 + b_3 < b_1 + b_2 + b_3 + b_4 < \sum_{i=1}^{5} b_i \leq 100,$$

donde

$$s = b_1(b_1 + b_2)(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) \in A.$$

Além disso, $f(s) = b_1b_2b_3b_4b_5 = s'$, o que prova que f é sobrejectiva.

Portanto f é uma correspondência biunívoca entre A e B, como se pretendia provar.

[Nota: Pode usar os exemplos indicados para entender melhor os argumentos apresentados para o caso geral.]

3. Uma sequência binária s de comprimento n que contém exactamente um bloco da forma 01 consiste num bloco de uns (de comprimento c_1, digamos), seguido de um bloco de zeros (de comprimento c_2), seguido do bloco 01, seguido de um bloco de uns (de comprimento c_3) e, finalmente, seguido de um bloco de zeros (de comprimento c_4):

$$\underbrace{\underline{1}\ldots\underline{1}}_{c_1}\;\underbrace{\underline{0}\ldots\underline{0}}_{c_2}\;\underline{0}\,\underline{1}\;\underbrace{\underline{1}\ldots\underline{1}}_{c_3}\;\underbrace{\underline{0}\ldots\underline{0}}_{c_4}$$

Note que os valores c_1, c_2, c_3 e c_4 podem ser zero, i.e., os blocos podem não existir. Por exemplo, para $n = 10$ temos os seguintes exemplos

$$\begin{array}{ll}
\underline{1}\,\underline{1}\boxed{\underline{0}\,\underline{1}}\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{0}\,\underline{0} & \text{com } c_1 = 2, c_2 = 0, c_3 = 4, c_4 = 2 \\
\underline{0}\boxed{\underline{0}\,\underline{1}}\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1} & \text{com } c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 7, c_4 = 0 \\
\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0}\boxed{\underline{0}\,\underline{1}} & \text{com } c_1 = 3, c_2 = 5, c_3 = 0, c_4 = 0
\end{array}$$

mas

$$\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{0} \quad , \quad \underline{1}\,\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0} \quad , \quad \underline{1}\,\underline{1}\,\underline{0}\,\underline{0}\boxed{\underline{0}\,\underline{1}}\underline{1}\,\underline{1}\boxed{\underline{0}\,\underline{1}}$$

não são sequências nas condições pedidas. Consideremos então o conjunto

$$A = \{s \in Seq_n \colon s \text{ tem exactamente um bloco da forma } 01\}.$$

Atendendo às considerações acima, temos

$$\begin{aligned}
s \in A &\iff s = \underbrace{\underline{1}\ldots\underline{1}}_{c_1}\;\underbrace{\underline{0}\ldots\underline{0}}_{c_2}\;\underline{0}\,\underline{1}\;\underbrace{\underline{1}\ldots\underline{1}}_{c_3}\;\underbrace{\underline{0}\ldots\underline{0}}_{c_4} \text{ com } c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = n - 2 \\
&\iff s = s_1\, s_2\, 0\, 1\, s_3\, s_4 \text{ onde } \begin{cases} s_1 = \text{tem } c_1 \text{ uns} \\ s_2 = \text{tem } c_2 \text{ zeros} \\ s_3 = \text{tem } c_3 \text{ uns} \\ s_4 = \text{tem } c_4 \text{ zeros} \end{cases} \text{ e } c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = n - 2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, uma solução natural da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n - 2$ é um 4-uplo $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{N}^4$ tal que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = n - 2$. Assim, o conjunto B a tomar é

$$B = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{N}^4 \colon \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = n - 2\}.$$

Agora consideremos a correspondência

$$s = s_1\, s_2\, 0\, 1\, s_3\, s_4 \overset{f}{\longmapsto} (c_1, c_2, c_3, c_4) \ \text{ onde } \begin{cases} s_1 = \text{tem } c_1 \text{ uns} \\ s_2 = \text{tem } c_2 \text{ zeros} \\ s_3 = \text{tem } c_3 \text{ uns} \\ s_4 = \text{tem } c_4 \text{ zeros} \end{cases}.$$

Temos de provar que f é uma função bijectiva.

1a. Seja $s = s_1\, s_2\, 0\, 1\, s_3\, s_4 \in A$ com os s_i como indicado acima. Logo

$$c_i = \text{ comprimento de } s_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

e, portanto, $n = c_1 + c_2 + 2 + c_3 + c_4$. Segue-se que $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = n - 2$, e isso prova que $f(s) = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in B$.

1b, 2b. Sejam

$$s = s_1\, s_2\, 0\, 1\, s_3\, s_4 \in A \ \text{ com } \begin{cases} s_1 = \text{tem } c_1 \text{ uns} \\ s_2 = \text{tem } c_2 \text{ zeros} \\ s_3 = \text{tem } c_3 \text{ uns} \\ s_4 = \text{tem } c_4 \text{ zeros} \end{cases}$$

$$t = t_1\, t_2\, 0\, 1\, t_3\, t_4 \in A \ \text{ com } \begin{cases} t_1 = \text{tem } d_1 \text{ uns} \\ t_2 = \text{tem } d_2 \text{ zeros} \\ t_3 = \text{tem } d_3 \text{ uns} \\ t_4 = \text{tem } d_4 \text{ zeros} \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned} f(s) = f(t) &\Leftrightarrow (c_1, c_2, c_3, c_4) = (d_1, d_2, d_3, d_4) \Leftrightarrow c_1 = d_1, c_2 = d_2, c_3 = d_3, c_4 = d_4 \\ &\Leftrightarrow s_1 = t_1, s_2 = t_2, s_3 = t_3, s_4 = t_4 \Leftrightarrow s = t. \end{aligned}$$

2a. Seja $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in B$. Então $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3, 4$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = n - 2$. Agora seja

$$s_1 = \underbrace{1 \ldots 1}_{\alpha_1}, \ s_2 = \underbrace{0 \ldots 0}_{\alpha_2}, \ s_3 = \underbrace{1 \ldots 1}_{\alpha_3}, \ s_4 = \underbrace{0 \ldots 0}_{\alpha_4}.$$

Consideremos $s = s_1\, s_2\, 0\, 1\, s_3\, s_4$. Por construção $s \in A$ e temos $f(s) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

Portanto f é uma correspondência biunívoca entre os conjuntos A e B. Isso prova que $\#A = \#B$.

4. (a) Fazemos os diagramas de Ferrers da cada partição. Os diagramas das partições conjugadas obtêm-se trocando as linhas por colunas. A partição correspondente ao diagrama obtido é a partição conjugada da inicial. Temos então

$$6{+}4{+}4{+}2{+}1{+}1 \leftrightarrow \begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & & & & & \\ \bullet & & & & & \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & & & & & \\ \bullet & & & & & \end{array} \quad \leftrightarrow 6{+}4{+}3{+}3{+}1{+}1$$

$$8{+}5{+}3{+}2 \leftrightarrow \begin{array}{l} \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{l} \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \leftrightarrow 4{+}4{+}3{+}2{+}2{+}1{+}1{+}1$$

$$3+3+3+3+2+2+2 \leftrightarrow \begin{array}{l} \bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{l} \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \end{array} \leftrightarrow 7+7+4$$

$$5+4+4+4+1 \leftrightarrow \begin{array}{l} \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{l} \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \\ \bullet \end{array} \leftrightarrow 5+4+4+4+1$$

A última partição coincide com a sua conjugada e, portanto, diz-se *auto-conjugada*.

5. A função que a cada elemento $x \in X$ faz corresponder o par ordenado (x, a) é uma correspondência biunívoca.

6. Por exemplo, a função $f\colon \{1,2\} \to \{1,2,3\}$ tal que $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ é injectiva, mas não é sobrejectiva. A função $f\colon \{1,2,3\} \to \{1,2\}$ tal que $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$ é sobrejectiva, mas não é injectiva.

7. Por definição
$$s = a_1 a_2 \dots a_k \in S_7 \iff a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 7.$$
Por exemplo:
$$s_1 = 1\,1\,5\,,\ s_2 = 1\,5\,1\,,\ s_3 = 1\,6\,,\ s_4 = 1\,3\,1\,1\,1 \in S_7.$$
Podem acontecer, 2 casos possíveis ou $a_k = 1$ ou $a_k > 1$:

   - $a_k = 1$. Então a sequência tem a forma
   $$s = a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k = a_1 a_2 \dots a_{k-1} 1 \ \text{ e temos } a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + 1 = 7$$
   e, portanto,
   $$s' = a_1 a_2 \dots a_{k-1} \in S_6 \ \text{ e } \boxed{s = s'1 = \text{ sequência de } S_6 \text{ seguida de } 1}.$$
   - $a_k > 1$. Então $a_k = (a_k - 1) + 1$ e a sequência tem a forma
   $$s = a_1 a_2 \dots a_k \ \text{ com } \boxed{s' = a_1 a_2 \dots (a_k - 1) \in S_6}.$$

Portanto, toda a sequência de S_7 pode obter-se de uma das seguintes duas maneiras (exclusivas): ou uma sequência de S_6 seguida do termo 1, ou adicionando uma unidade ao último termo de uma sequência de S_6. Note que este último caso não se pode obter quando a sequência consiste apenas do número 6, uma vez que 7 não é uma entrada permitida. Logo

$$\#S_7 = \#S_6 + (\#S_6 - 1) = 2\#S_6 - 1.$$

(Isto significa que há quase duas vezes mais maneiras de obter uma soma de 7, quando se vão rolando dados, do que obter uma soma de 6.)

8. A função Φ, definida na demonstração, não será bijectiva se $X \cap Y \neq \emptyset$. Seja, pois $a \in X \cap Y$. Sejam $\Phi_1 \colon [n] \to X$ e $\Phi_2 \colon [m] \to Y$ duas bijecções, como na demonstração. Então, em particular, Φ_1 e Φ_2 são funções sobrejectivas. Logo

$$\exists i \in [n] \colon a = \Phi_1(i) \quad , \quad \exists j \in [m] \colon a = \Phi_2(j).$$

Portanto, na definição de $\Phi \colon [n+m] \to X \cup Y$ vamos ter

$$\Phi(i) = \Phi_1(i) = a \quad , \quad \Phi(n+j) = \Phi_2(n+j-n) = \Phi_2(j) = a$$

com

$$i \leq n \quad , \quad n+j > n.$$

Deste modo, temos

$$\Phi(i) = \Phi(n+j) \text{ e } i \neq n+j,$$

ou seja Φ não é injectiva.

9. $\Phi \circ \Phi^{-1} = \mathrm{id}_B$ e $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathrm{id}_A$.

10. Aplicar o critério e identidade de funções referido no enunciado.

11. Neste exercício vamos aplicar a proposição da página 26:

> Sejam A e B dois conjuntos finitos. Seja $\Phi \colon A \to B$ uma função. Dado $b \in B$ temos
>
> $$A_b = \{a \in A \colon \Phi(a) = b\}.$$
>
> Se $\#A > r \cdot \#B$ então existe $b \in B$ tal que $\#A_b > r$.

Consideremos os conjuntos

$$A = \{a \colon a \text{ é pessoa}\} \ , \ B = \{b \colon b \text{ é mês do ano}\} = \{\text{Janeiro, Fevereiro,...,Dezembro}\}.$$

Consideremos a correspondência

$$\begin{aligned} \Phi \ : \ & A \longrightarrow B \\ & a \longmapsto \Phi(a) = \text{mês de aniv. de } a, \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$A_{Junho} = \{a \in A \colon a \text{ faz anos em Junho}\}.$$

Suponhamos que $\#A \geq 25$. Sabemos que $\#B = 12$. Então

$$\#A = 25 > 24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot \#B.$$

Então, pelo resultado acima, existe um mês $b \in B$ tal que

$$\#A_b > 2.$$

Portanto, podemos garantir que há pelo menos três pessoas a fazer anos no mesmo mês desde que A tenha pelo menos 25 pessoas.

12. Neste exercício vamos aplicar o Princípio dos Cacifos (ver página 26):

> Sejam A e B dois conjuntos finitos tais que $\#A > \#B$. Então **não existe** uma função injectiva $\Phi\colon A \to B$.

Seja A um conjunto finito de pessoas e suponhamos que $\#A \geq 2$. Para cada $a \in A$, seja $A(a) = \{b \in A \mid b \neq a, b \text{ é amigo de } a\} \subseteq A \setminus \{a\}$. Note que $\#A(a)$ é o número de amigos da pessoa a. Temos 3 casos a considerar:

1º caso: Todas as pessoas de A têm amigos, isto é, $\forall a \in A, 1 \leq \#A(a) \leq n-1$. Neste caso, consideremos a correspondência

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & A & \longrightarrow & \{1,2,\ldots,n-1\} = [n-1] \\ & a & \longmapsto & \#A(a) \end{array}.$$

Como $\#A = n > n-1 = \#[n-1]$, Φ não é injectiva - pelo *Teorema dos Cacifos*. Portanto, existem pessoas $a \neq a'$ tais que $\Phi(a) = \Phi(a')$, ou seja existem duas pessoas com o mesmo número de amigos.

2º caso: Apenas uma pessoa de A não tem amigos, isto é, $\exists! a \in A\colon \#A(a) = 0$. Logo $A' = A \setminus \{a\}$ tem $n-1$ pessoas e todas as pessoas de A' têm amigos, isto é, $\forall a' \in A', 1 \leq \#A(a') \leq n-2$. Neste caso, consideremos a correspondência

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & A' & \longrightarrow & \{1,2,\ldots,n-2\} = [n-2] \\ & a' & \longmapsto & \#A(a') \end{array}.$$

Pelo *Teorema dos Cacifos*, Φ não é injectiva, logo existem duas pessoas com o mesmo número de amigos.

3º caso: Existem, pelo menos, duas pessoas sem amigos. Sejam elas a e b. Logo $\#A(a) = 0 = \#A(b)$ e, neste caso, o resultado também está provado.

Note-se que estes casos são todos os possíveis e, como em cada um deles, provámos que existem duas pessoas com o mesmo número de amigos, então o resultado está provado.

13. Comecemos por ilustrar este resultado com três exemplos para $n = 2$ (logo $n^2 + 1 = 5$ e $n + 1 = 3$):

- Para a sequência $s_1 = 1\,5\,2\,3\,4$ temos:
  - $s_1' = 1\,2\,3\,4$ é a maior subsequência estritamente crescente de s_1 e tem comprimento 4 - logo também há subsequências estritamente crescentes de comprimento 3.
  - Não há subsequências estritamente decrescentes de s_1 com comprimento 3.
- Para a sequência $s_2 = 5\,2\,3\,1\,4$ temos:
  - $s_2' = 2\,3\,4$ é a maior subsequência estritamente crescente de s_2 e tem comprimento 3.
  - $s_2'' = 5\,2\,1$ e $s_2'' = 5\,3\,1$ são subsequências estritamente decrescentes de s_2 com comprimento 3 (e este é máximo).
- Para a sequência $s_3 = 5\,1\,4\,3\,2$ temos:
  - Não há subsequências estritamente crescentes de s_3 com comprimento 3.

– $s'_3 = 5\,4\,3\,2$ é a maior subsequência estritamente decrescente de s_3 e tem comprimento 4 - logo também há subsequências estritamente decrescentes de comprimento 3.

Neste exercício voltamos a aplicar o Teorema dos Cacifos.

Seja $s = a_1 a_2 \cdots a_{n^2+1}$ uma sequência de comprimento $n^2 + 1$. Para qualquer $k \in \{1, 2, \ldots, n^2 + 1\}$, sejam

$$\begin{aligned} c_k &= \text{comprimento da } \textbf{maior} \text{ subsequência } \textbf{estritamente crescente} \\ &\quad \text{que começa em } a_k \\ \ell_k &= \text{comprimento da } \textbf{maior} \text{ subsequência } \textbf{estritamente decrescente} \\ &\quad \text{que começa em } a_k \end{aligned}$$

Suponhamos, com vista a um absurdo, que $c_k < n + 1$ e $\ell_k < n + 1$ para qualquer $k \in \{1, 2, \ldots, n^2 + 1\}$. Então, os pares (c_k, ℓ_k) estão todos no conjunto $[n] \times [n] = \{(i, j) \colon 1 \leq i, j \leq n\}$; dito de outro modo,

$$\{(c_k, \ell_k) \colon 1 \leq k \leq n^2 + 1\} \subseteq [n] \times [n].$$

Sendo assim, temos

$$\#\{(c_k, \ell_k) \colon 1 \leq k \leq n^2 + 1\} \leq \#\big([n] \times [n]\big) = \#[n] \cdot \#[n] = n^2.$$

Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Phi \,: & [n^2 + 1] & \longrightarrow & \{(c_k, \ell_k) \colon 1 \leq k \leq n^2 + 1\} \\ & k & \longmapsto & (c_k, \ell_k) \end{array}.$$

Pelo Teorema dos Cacifos, esta aplicação **não é injectiva** e, portanto,

$$\text{existem } k, k' \in [n^2 + 1] \text{ tais que } k \neq k' \text{ e } \Phi(k) = \Phi(k').$$

Quer dizer que,

$$(c_k, \ell_k) = \Phi(k) = \Phi(k') = (c_{k'}, \ell_{k'}) \ \text{ com } k \neq k'$$

ou seja, $c_k = c_{k'}$ e $\ell_k = \ell_{k'}$ e $k \neq k'$. Ora

$$k \neq k' \iff k < k' \text{ ou } k' < k.$$

Vamos supor que $k < k'$ (se for $k' < k$, argumentamos da mesma forma). Então na sequência dada

$$s = a_1 a_2 \cdots a_{n^2+1}$$

se for $a_k < a_{k'}$, vem $c_{k'} \geq c_k + 1$, o que não pode acontecer (porque $c_k = c_{k'}$). Por conseguinte, terá de ser $a_{k'} < a_k$ (porque $k \neq k'$ e as sequências são de números distintos). Mas neste caso, temos $\ell_{k'} \geq \ell_k + 1$, o que também não pode acontecer (porque $\ell_k = \ell_{k'}$). Chegamos a um absurdo, logo $s = a_1 a_2 \cdots a_{n^2+1}$ tem a propriedade pretendida, isto é: ou $c_k = n + 1$ (e, portanto, s tem uma sequência estritamente crescente com comprimento $n + 1$ que começa em a_k), ou $\ell_k = n + 1$ (e, portanto, s tem uma sequência estritamente decrescente com comprimento $n + 1$ que começa em a_k).