

”

E-fólio A | Folha de resolução para E-fólio



UNIDADE CURRICULAR: Computação Numérica

CÓDIGO: 21180

DOCENTE: Yves Robert, Filipe Pais

A preencher pelo estudante

NOME: Miguel Couceiro

N.º DE ESTUDANTE: 2201081

CURSO: Eng. Informática

DATA DE ENTREGA: 01/12/2025

TRABALHO / RESOLUÇÃO:

1.1)

Volume de um cone com raio r e altura h é descrito por:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Pretende-se determinar o erro absoluto ε_V em função do erro absoluto associado ao raio ε_r e do erro relativo da altura $r h$.

Como o volume depende simultaneamente de r e h , o erro absoluto pode ser aproximado utilizando a forma linear de propagação de erros, onde se combinam as derivadas parciais de V relativamente a cada variável:

$$\varepsilon_V \approx \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right| \varepsilon_r + \left| \frac{\partial V}{\partial h} \right| \varepsilon_h$$

Para obter estas derivadas, diferenciámos a expressão do volume. Em relação ao raio obtém-se:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\pi}{3} * 2rh = \frac{2\pi rh}{3}$$

De forma análoga, relativamente à altura:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi r^2}{3}.$$

O erro associado ao raio já é apresentado como erro absoluto ε_r . No caso da altura, o enunciado fornece um erro relativo, pelo que se aplica a relação geral:

$$\varepsilon_h = h r_h$$

Substituindo todas estas expressões na fórmula da propagação do erro, obtém-se:

$$\varepsilon_V \approx \left(\frac{2\pi rh}{3}\right) \varepsilon_r + \left(\frac{\pi r^2 h}{3}\right) (hr_h)$$

Reagrupando os termos:

$$\varepsilon_V = \frac{2\pi rh}{3} \varepsilon_r + \frac{\pi r^2 h}{3} r_h$$

Fatorizando:

$$\varepsilon_V = \frac{\pi h}{3} (2r \varepsilon_r + r^2 r_h)$$

Assim, a expressão final do erro absoluto do volume é:

$$\varepsilon_V(\varepsilon_r, r_h) = \frac{\pi hr}{3} (2\varepsilon_r + rr_h)$$

1.2)

A expressão deduzida na alínea 1.1 para o erro absoluto do volume é:

$$\varepsilon_V(\varepsilon_r, r_h) = \frac{\pi h r}{3} (2\varepsilon_r + r r_h)$$

Substituindo os valores fornecidos no enunciado $h=2$, $\varepsilon_r = 0.01$ e $r_h = 0.001$ obtém-se a expressão particularizada:

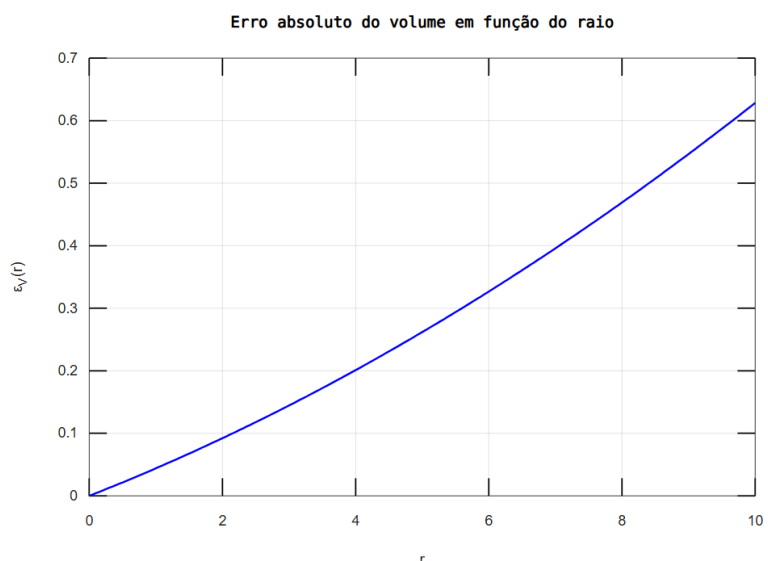
$$\varepsilon_V(r) = \frac{\pi 2r}{3} (2 * 0.01 + r * 0.001)$$

$$\varepsilon_V(r) = \frac{\pi 2r}{3} (0.02 + r * 0.001)$$

Esta função descreve como o erro absoluto no volume cresce com o raio, apresentando um termo linear e um termo quadrático, o que explica o aumento progressivamente mais rápido para valores elevados de r .

Para ilustrar este comportamento, foi criado o script efa22_1.m, que calcula $\varepsilon_V(r)$ em

200 pontos igualmente espaçados no intervalo $r \in [0,10]$ e gera o gráfico correspondente.



1.3)

Pretende-se agora determinar o valor de r que satisfaz a condição

$$\varepsilon_V(r) = \varepsilon_{max}, \quad \varepsilon_{max} = 0.3$$

onde $\varepsilon_V(r)$ é a expressão deduzida anteriormente

$$\varepsilon_V(r) = \frac{\pi h r}{3} (2\varepsilon_r + r r_h)$$

Para encontrar r_{max} recorrendo ao método do ponto fixo, é necessário reformular esta equação na forma $r = f(r)$. Começamos por igualar a expressão do erro ao valor máximo permitido

$$\frac{\pi h r}{3} (2\varepsilon_r + r r_h) = \varepsilon_{max}$$

$$r(2\varepsilon_r + r r_h) = \frac{3\varepsilon_{max}}{\pi h}$$

$$r2\varepsilon_r + r^2 r_h = \frac{3\varepsilon_{max}}{\pi h}$$

Para aplicar o método do ponto fixo, isolamos r num dos lados. Uma forma conveniente consiste em isolar o termo linear em r :

$$r2\varepsilon_r = \frac{3\varepsilon_{max}}{\pi h} - r^2 r_h$$

$$r = \frac{\frac{3\varepsilon_{max}}{\pi h} - r^2 r_h}{2\varepsilon_r}$$

Desta forma obtém-se a função iteradora:

$$f(r) = \frac{\frac{3\varepsilon_{max}}{\pi h} - r^2 r_h}{2\varepsilon_r}$$

Para verificar que o método converge, analisamos a derivada de $f(r)$:

$$f'(r) = \frac{-2rr_h}{2\varepsilon_r} = \frac{r_h}{\varepsilon_r} r$$

Usando os valores do problema de $r_h = 0.001$ e $\varepsilon_r = 0.01$ obtemos

$$f'(r) = -0.1r$$

No intervalo onde se espera encontrar a solução (por exemplo $r \in [0,9]$), verificamos:

$$|f'(r)| = -0.1|r| \leq 0.9 < 1$$

Isto garante que $f(r)$ é uma contração neste intervalo, pelo que o método do ponto fixo é aplicável e converge para a solução procurada a partir de qualquer valor inicial razoável, incluindo $r_0 = 0.1$.

1.4)

k	r_k	erro absoluto (estimado)
0	0.1000000000	n/a
1	7.1614724391	6.3553251952e+01
2	4.5976380643	2.3074509373e+01
3	6.1050586506	1.3566785277e+01
4	5.2983853828	7.2600594107e+00
5	5.7583280559	4.1394840584e+00
6	5.5040553392	2.2884544509e+00
7	5.6472411803	1.2886725704e+00
8	5.5674057917	7.1851849746e-01
9	5.6121720767	4.0289656459e-01
10	5.5871486682	2.2521067584e-01
11	5.6011609271	1.2611032969e-01
12	5.5933222526	7.0548070589e-02
13	5.5977097481	3.9487459479e-02
14	5.5952547180	2.2095271132e-02
15	5.5966286712	1.2365579233e-02
16	5.5958598150	6.9197060406e-03
17	5.5962900857	3.8724365093e-03
18	5.5960493030	2.1670444947e-03
19	5.5961840491	1.2127148727e-03
20	5.5961086436	6.7864939227e-04
21	5.5961508416	3.7978213170e-04
22	5.5961272270	2.1253100829e-04
23	5.5961404421	1.1893530715e-04
24	5.5961330468	6.6557789640e-05
25	5.5961371853	3.7246649221e-05
26	5.5961348693	2.0843728167e-05
27	5.5961361654	1.1664433811e-05
28	5.5961354401	6.5275752323e-06
29	5.5961358460	3.6529197507e-06