UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

p-Fólio

U.C. 21076
Investigação Operacional

12 de Junho de 2012

- INSTRUÇES -

- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Sempre que não utilize o enunciado da prova para resposta, poderá ficar na posse do mesmo.
- No caso de provas com escolha múltipla, **sem grelha de resposta**, deverá indicar a resposta correcta na folha de ponto, indicando o número da pergunta e a resposta que considera correcta.
- No caso de provas com escolha múltipla, **com grelha de resposta, tabela e/ou espaços para preenchimento**, deverá efectuar as respostas no enunciado, pelo que o mesmo deverá ser entregue ao vigilante, juntamente com a folha de ponto, **não sendo permitido ao estudante levar o enunciado**.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas.
- Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Os telemóveis deverão ser desligados durante toda a prova e os objectos pessoais deixados em local próprio da sala de exame.
- A prova é constituda por 8 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- É permitido o uso de máquina de calcular.
- **Duração: 90 minutos**.
- As questões terão as cotações seguintes:

1.	2.
6.0	6.0

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter

1.1 Um determinado recinto desportivo possui uma única bilheteira onde são vendidos bilhetes por um único funcionário. Pode considerar-se que as chegadas de espectadores constituem um processo de Poisson, com uma taxa média de 45 chegadas por hora, e estima-se que a duração de cada atendimento se possa considerar exponencialmente distribuído, com valor médio igual a 60 segundos.

Solução:

Sistema de fila de espera $M/M/1$ com: (i) taxa média de chegada de clientes $\lambda = 45$ chegadas por hora $= \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ chegadas por minuto; (ii) tempo esperado de atendimento de um cliente $\frac{1}{\mu} = 60$ segundos $= 1$ minuto. Logo: (i) a taxa média de atendimento de clientes $\mu = 1$ minuto; taxa de ocupação $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4}$; taxa de desocupação $1 - \rho = \frac{1}{4}$.

(a) Determine a probabilidade de estar exactamente 1 espectador na bilheteira.

Solução:

Como $\rho = \frac{3}{4} < 1$, temos $P_1 = \rho^1 P_0 = \rho(1-\rho) = \frac{3}{16} = 0.1875(18.75\%)$.

(b) Determine o comprimento médio da fila de espera e o tempo médio de espera na fila por espectador.

Solução:

$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{9}{4} = 2.25$ espectadores.

$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 3$ minutos.

(c) Determine a probabilidade de que um espectador esteja mais do 2 minutos na bilheteira.

Solução:

$P(W > 2) = e^{-\mu(1-\rho)2} = e^{-\frac{1}{2}} = 0.6065(60.65\%)$.

(d) Determine a probabilidade de que um espectador esteja mais do que 1 minuto á espera para começar a ser atendido.

Solução:

$P(W_q > 1) = \rho e^{-\mu(1-\rho)1} = \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{4}} = 0.5841(58.41\%)$.

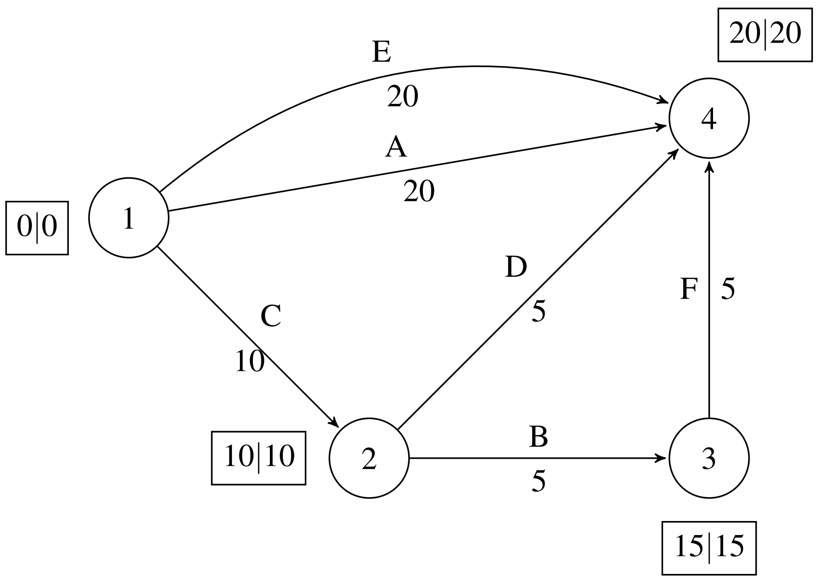
1.2 Considere um empreendimento caraterizado pelas seguintes atividades, precedências e durações:

Atividades	Precedências	Duração	
		μ	σ
A	-	20	3
B	C	5	1
C	-	10	2
D	C	5	1
E	-	20	3
F	B	5	1

(a) Trace a rede que representa o empreendimento.

Solução:

Temos o diagrama PERT:



(b) Determine a duração total média do empreendimento.

Solução:

$T = 20$ dias.

(c) Determine o caminho crítico médio (C.C.M.) do empreendimento.

Solução:

Temos os caminhos críticos: A; E; $C+B+F$.

(d) Determine, usando a técnica PERT, a probabilidade da duração do empreendimento ser inferior a 20 dias.

Solução:

Valor esperado da duração do empreendimento:

$E(T) = \max\{E(T_A), E(T_E), E(T_C) + E(T_B) + E(T_F)\} = \max\{20, 20, 10 + 5 + 5\} = 20$ dias.

Variância da duração do empreendimento:

$\sigma^2 = \max\{\sigma_A^2, \sigma_E^2, \sigma_C^2 + \sigma_B^2 + \sigma_F^2\} = \max\{9, 9, 4 + 1 + 1\} = 9.$

Logo

$P(T < 20) = P(T \leq 20) = P(Z \leq \frac{20-20}{3}) = \Phi(\frac{20-20}{3}) = \Phi(0) = 0.5(50\%).$

Características do modelo $M/M/1$

Chegada: Poissoniana	**Tempo atendimento:** exponencial negativo
Taxa: λ clientes / u. tempo	**Taxa:** μ clientes / u.tempo e servidor
População $= \infty$	**Nº servidores:** 1
Fila máxima $= \infty$	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, com $\rho < 1$
	Taxa de ocupação $= \rho$
	Taxa de desocupação $= 1 - \rho$
$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$	$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$
$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$	$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$
$P_0 = 1 - \rho$	$P(W > t) = e^{-\mu(1-\rho)t},\ t \geq 0$
$P_n = \rho^n P_0$	$P(W_q > t) = \rho\, e^{-\mu(1-\rho)t},\ t \geq 0$
$P(n > k) = \rho^{k+1}$	$P(W_q = 0) = P_0$

Características do modelo $M/M/S$

Chegada: Poissoniana	**Tempo atendimento:** exponencial negativo
Taxa: λ clientes / u. tempo	**Taxa:** μ clientes / u.tempo e servidor
População $= \infty$	**Nº servidores:** S
Fila máxima $= \infty$	$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$, com $\rho < 1$
	Taxa de ocupação $= \rho$
	Taxa de desocupação $= 1 - \rho$
$L_q = \sum_{n=S}^{\infty}(n-S)P_n = \frac{P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2}$	$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$
$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$	$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$
$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S}{S!}\frac{1}{1-\rho}}$	$P(W > t)_{t\geq 0} = e^{-\mu t}\left(1 + \frac{P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S}{S!(1-\rho)}\frac{1-e^{-\mu t(S-1-\lambda/\mu)}}{S-1-\frac{\lambda}{\mu}}\right)$
$P_n = \begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}P_0, \text{ se } 0 \leq n \leq S \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{S!S^{n-S}}P_0, \text{ se } n \geq S \end{cases}$	$P(W_q > t)_{t\geq 0} = [1 - P(W_q = 0)]e^{-S\mu(1-\rho)t}$
	$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$

Características do modelo $M/M/1/K$

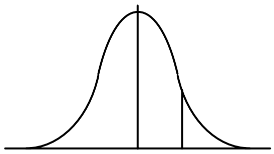
Chegada: Poissoniana	**Tempo atendimento:** exponencial negativo
Taxa: λ clientes / u.tempo	**Taxa:** μ clientes / u.tempo e servidor
$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots, K-1 \\ 0 & \text{para } n \geq K \end{cases}$	**Nº servidores:** 1
$\overline{\lambda} = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda P_n = \lambda(1 - P_K)$	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
População $= \infty$	**Taxa de ocupação** $= \frac{\overline{\lambda}}{\mu}$
Nº máximo de elementos no sistema $= K$	**Taxa de desocupação** $= 1 - \frac{\overline{\lambda}}{\mu}$
Fila máxima $K - 1$	
$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = L - \frac{\overline{\lambda}}{\mu}$	$W_q = \frac{L_q}{\overline{\lambda}}$
$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$	$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\overline{\lambda}}$
$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$ (Taxa de desocupação)	
$P_n = \begin{cases} \rho^n P_0, & \text{se } n = 1, \ldots, K \\ 0, & \text{se } n > K \end{cases}$	$P(W_q = 0) = P_0$

Características do modelo $M/M/S/K$

Chegada: Poissoniana	**Tempo atendimento:** exponencial negativo
Taxa: λ clientes / u.tempo	**Taxa:** μ clientes / u.tempo e servidor
$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots, K-1 \\ 0 & \text{para } n \geq K \end{cases}$	**Nº servidores:** S
$\overline{\lambda} = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda P_n = \lambda(1 - P_K)$	$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$
População $= \infty$	**Taxa de ocupação** $= \frac{\overline{\lambda}}{S\mu}$
Nº máximo de elementos no sistema $= K$	**Taxa de desocupação** $= 1 - \frac{\overline{\lambda}}{S\mu}$
Fila máxima $K - S$	
$L_q = \sum_{n=S}^{\infty} (n-S)P_n =$	$W_q = \frac{L_q}{\overline{\lambda}}$
$= \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} \times [1 - \rho^{K-S} - (K-S)\rho^{K-S}(1-\rho)]$	
$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L_q + \frac{\overline{\lambda}}{\mu}$	$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\overline{\lambda}}$
$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S}{S!} \sum_{n=S}^{K} \rho^{n-S}}$	$P_n = \begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0, & \text{se } n = 1, \ldots, S \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{S! S^{n-S}} P_0, & \text{se } n = S, \ldots, K \\ 0, & \text{se } n > K \end{cases}$
$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$	

Distribuição normal padrão

NORMAL DISTRIBUTION TABLE



	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Distribuição t de Student

t Table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	**0.50**	**0.25**	**0.20**	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**	**0.001**	**0.0005**
two-tails	**1.00**	**0.50**	**0.40**	**0.30**	**0.20**	**0.10**	**0.05**	**0.02**	**0.01**	**0.002**	**0.001**
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.000	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
1000	0.000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300
z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%
	Confidence Level										

t-table.xls 7/14/2007

FIM