

U.C. 21021

Computação Numérica

28 de julho de 2017

INSTRUÇÕES

- Leia estas instruções na totalidade antes de iniciar a resolução da prova.
- O enunciado da prova é constituído por 5 grupos de questões e termina com a palavra FIM.
- Se o seu exemplar não estiver completo ou nele se verificar qualquer outra deficiência, por favor dirija-se ao professor vigilante.
- A prova deve ser resolvida na sua totalidade em folhas de respostas.
- Nas respostas, tenha a preocupação de utilizar uma letra legível.
- Todas as respostas devem ser escritas unicamente com caneta azul ou preta.
- A prova é SEM CONSULTA. Todos os elementos necessários à resolução são fornecidos no enunciado.
- Para a execução da prova é INDISPENSÁVEL a utilização de calculadora.
- As cotações são indicadas por grupo e nas próprias questões.
- As respostas devem ser claras, indicando todos os passos e cálculos intermédios necessários à compreensão da resolução de cada questão. À simples indicação do resultado é atribuída a cotação zero.
- Nas questões de escrita de programas, a sua correção terá em conta critérios de proficiência e compreensibilidade do código (legibilidade, indentação, estrutura, comentários e explicação geral).
- O não cumprimento das instruções implica a anulação das respetivas questões.
- O tempo de realização da prova é de 150 minutos.

Grupo I [3 valores]

1. Considere $x = 0.274528\dots$ e a aproximação $\bar{x} = 0.274$,
 - 1.1. [1.5] Determine limites superiores ϵ_{LS}, r_{LS} respectivamente para os erros absoluto $\epsilon \leq \epsilon_{LS}$ e relativo $r \leq r_{LS}$. Os limites devem ser os menores possíveis para a precisão dada para x e \bar{x} .
 - 1.2. [0.75] Baseado no erro absoluto determinado na alínea anterior, determine quantos algarismos significativos tem a aproximação dada. Justifique.
 - 1.3. [0.75] Obtenha um novo valor aproximado, por arredondamento (simétrico) da terceira casa decimal. Quantos algarismos significativos tem esta aproximação? Justifique.

Grupo II [3 valores]

2. Considere a seguinte equação,

$$e^x - 1.2 = 0$$

- 2.1. [0.5] Mostre que a equação dada tem uma única raiz no intervalo $[0, 1]$.
- 2.2. [1.5] Obtenha uma aproximação do valor dessa raiz aplicando quatro iterações do método da bissecção, a partir do valor inicial $a_0 = 0, b_0 = 1$. Construa uma tabela onde constem os valores necessários de $k, a_k, b_k, x_k, f(x_k)$, sinais de $f()$, para $k = 0, 1, 2, 3$.
- 2.3. [0.5] Determine uma estimativa do erro para a aproximação da raiz determinada na alínea anterior.
- 2.4. [0.5] Indique quantas iterações seriam necessárias para obter uma aproximação da raiz com erro inferior a 10^{-3} .

Grupo III [4 valores]

3. Considere a matriz A e o vetor b seguintes,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 4 & 16 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 29 \end{bmatrix}$$

- 3.1. [2] Determine a fatorização LU de A .
- 3.2. [2] Resolva o sistema de equações lineares $Ax = b$ com $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ utilizando a fatorização encontrada na alínea anterior.

Grupo IV [2 valores]

4. Considere a tabela de valores seguinte correspondente a uma função $f(x)$,

x	$f(x)$
0.0	1.0
0.2	1.491825
0.4	2.225541

4.1. [2] Obtenha o polinómio interpolador de $f(x)$ nos três pontos tabelados através da fórmula de Lagrange.

Grupo V [8 valores]

5.1. [1.5] Apresente um pequeno programa em Octave que crie a matriz A a partir da concatenação de vetores e/ou matrizes. Utilize os operadores e funções que achar necessários para a sua criação (não devem ser criados elemento a elemento).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.2. [1.5] Considere as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \cos(3x)$. Apresente um pequeno programa em Octave que crie um gráfico conjunto das funções $f(x)$ e $g(x)$, com $f(x)$ para x de 0 a 2 com intervalos de 0.05, $g(x)$ para x de 0 a 1 com intervalos de 0.02 e com as seguintes características:

- $f()$ a traço contínuo de cor preta, com legenda;
- $g()$ a ponteadado de cor azul, com legenda;
- com grelha;
- o ponto (1, 1) deve ser assinalado com um marcador tipo bola, de cor vermelha;
- o eixo das abcissas deve ter a etiqueta " x ";
- o eixo das ordenadas deve ter a etiqueta " $f(x), g(x)$ ".

5.3. [5] Escreva uma função em Octave `[x1,x2]=poliraiz01(a,b,c)` que dado um polinómio de 2º grau $ax^2 + bx + c$ com raízes reais calcule as suas raízes por um método estável, ou seja, tendo em conta a possibilidade de ocorrência de cancelamento subtrativo quando $|b| \gg |4ac|$. No caso de o polinómio dado ter raízes complexas, a função deve emitir uma mensagem de aviso e retornar a matriz vazia em $\mathbf{x1}$ e $\mathbf{x2}$.

FORMULÁRIO

Fatorização $A = LU$

$$u_{1,j} = a_{1,j} \quad j \geq 1$$

$$l_{i,1} = a_{i,1}/u_{1,1} \quad i \geq 2$$

$$u_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} u_{k,j} \quad j \geq i \geq 2$$

$$l_{j,i} = (a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{j,k} u_{k,i})/u_{i,i} \quad j > i \geq 2$$

Fatorização (Cholesky) $A = LL^T$

$$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$$

$$l_{i,1} = a_{i,1}/l_{1,1} \quad i \geq 2$$

$$l_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}^2} \quad i \geq 2$$

$$l_{j,i} = (a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} l_{j,k})/l_{i,i} \quad j > i \geq 2$$

Fórmula Interpoladora de Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L(x_i)$$

$$L(x_i) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças divididas

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n f[x_0, \dots, x_i]$$

$$\cdot (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças descendentes

$$p_n(x_0 + sh) = f_0 + s\Delta_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta_0^2 + \dots + \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!} \Delta_0^n$$

FIM