Curso de Qualificação para Estudos Superiores - CQES Matemática | 71061

Enunciado

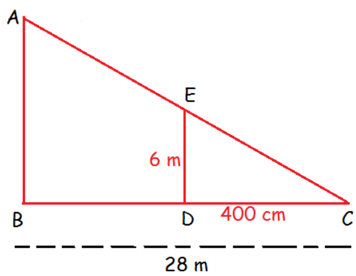
1. **(0,50 valores)** Sabendo que a base (lado maior) do retângulo mede 20 cm e que a sua diagonal mede 25 cm, quanto mede a altura (lado menor) do retângulo? Justifique a sua resposta.

   Resolução: Sabemos que o lado maior de um retângulo juntamente com o lado menor e com a diagonal que os une forma um triângulo retângulo. Logo, denotando por x a medida do lado menor temos, pelo teorema de pitágoras, a seguinte equação:

   $(25)^2 = (20)^2 + x^2$, ou seja, $x^2 = 625 - 400 = 225$, isto é $x = \pm\sqrt{225} = \pm 15$.

   Como uma medida não pode ser um valor negativo concluímos que $x = 15$ ou seja a altura (lado menor) do triângulo mede 15cm.

2. **(1,0 valores)** Considerando a imagem seguinte



   determine o comprimento do segmento [AB]. Justifique a sua resposta.

   Resolução: Convertendo o comprimento do segmento [DC] para metros (para todas as medidas estarem na mesma unidade) vemos que [DC] mede 4m. Dado que os triângulos △ABC e △EDC são semelhantes (possuem dois ângulos iguais) sabemos que os respetivos lados são proporcionais, logo $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC}$ ou seja $\frac{AB}{6} = \frac{28}{4}$ e portanto $AB = \frac{6\times 28}{4} = 42$.

   Concluímos assim que o segmento [AB] mede 42 m.

3. (0,80 valores) Determine o domínio da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-3x+2}$$

.

Resolução: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0 \wedge x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$. Temos $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{4} \vee x \leq -\sqrt{4} \Leftrightarrow x \geq 2 \vee x \leq -2$. E $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(2)}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{3\pm1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$.

Logo $D =]-\infty, -2] \cup]2, +\infty[$.

4. (1,0 valores) Considere a função real de variável real definida por

$$g(x) = \begin{cases} e^x - 7, & x \geq 0 \\ x^2 + 5x - 6, & x < 0 \end{cases}$$

a) Identifique os zeros[1] de g.

Resolução: Comecemos por encontrar os zeros de g na porção não negativa do domínio:

$g(x) = 0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 7 = 0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow e^x = 7 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln e^x = \ln 7 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = \ln 7$.

Logo $\ln 7$ é um zero da função g. Vejamos se a função tem outros zeros na parte negativa.

$g(x) = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5\pm\sqrt{25-4(-6)}}{2} \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5\pm\sqrt{49}}{2} \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5\pm7}{2} \wedge x < 0 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -6) \wedge (x < 0) \Leftrightarrow x = -6$.

Concluímos assim que os zeros da função g são $\ln 7$ e -6.

b) Será g uma função injetiva? Justifique.

Resolução: A função g não é uma função injetiva pois existem elementos distintos do domínio com a mesma imagem. Por exemplo $\ln 7 \neq -6$ mas $g(\ln 7) = g(-6) = 0$.

5. (0,70 valores) Considere a seguinte progressão geométrica:

$$0.3;\ 0.6;\ 1.2; \ldots$$

a) Determine o termo geral da progressão geométrica.

[1] Designa-se por *zero* de uma função g todo o ponto x do domínio de g tal que $g(x) = 0$.

Resolução: Sabemos que o termo geral de uma progressão geométrica é dado pela fórmula $u_n = u_1 \times r^{n-1}$ em que u_1 é o primeiro termo da progressão e r é a razão. No caso concreto temos que $u_1 = 0.3$ e como $\frac{0.6}{0.3} = 2$ temos que $r = 2$. Assim, o termo geral da progressão geométrica dada é $u_n = 0.3 \times 2^{n-1}$.

b) Usando a fórmula da soma das progressões geométricas, determine a soma dos primeiros 10 termos desta progressão.

Resolução: A fórmula da soma é $S_n = \frac{u_1(1-r^n)}{1-r}$. Logo $S_{10} = \frac{0.3(1-2^{10})}{1-2} = \frac{0.3(1-1024)}{-1} = (-0.3) \times (-1023) = 306.9$.
Assim, a soma dos 10 primeiros termos é 306.9.

FIM