Análise Infinitesimal
21175 — ano lectivo 2022-2023
fevereiro de 2023

---

exame

época normal
proposta de resolução

---

1. Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+e^{-3x}\sin(5x)}{x^2+5}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^3-x^2-x+1}$.

Resolução:

a) O limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sin(5x)$ não existe, pelo que vamos separar uma parcela contendo este termo e tentar usar aí o Teorema dos limites enquadrados.

Sendo $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+e^{-3x}\sin(5x)}{x^2+5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+5} + \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-3x}\sin(5x)}{x^2+5}$, vamos calcular cada um destes limites em separado.

Parcela $\boldsymbol{\frac{2x^2}{x^2+5}}$: O limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+5}$ dá uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Dividindo o numerador e o denominador pelo termo de maior grau, x^2, concluímos que o limite anterior iguala $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1+\frac{5}{x^2}} = \frac{2}{1+0} = 2$.

Parcela $\boldsymbol{\frac{e^{-3x}\sin(5x)}{x^2+5}}$: Temos $-1 \leq \sin(5x) \leq 1$ e, sendo $e^{-3x} > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, temos $-e^{-3x} \leq e^{-3x}\sin(5x) \leq e^{-3x}$. Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -e^{-3x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$ então, pelo Teorema dos limites enquadrados, temos $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-3x}\sin(5x) = 0$.

Logo, também $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-3x}\sin(5x)}{x^2+5} = 0$.

Conclusão: O limite pedido é $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+e^{-3x}\sin(5x)}{x^2+5} = 2+0 = 2$.

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

b) A função $\cos(x)$ é básica, logo a sua composição com o monómio $\frac{\pi}{2}x$ é uma função elementar e daí resulta que o produto e o quociente dessa composição com dois polinómios, $\frac{(x-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^3-x^2-x+1}$, seja também uma função elementar e, portanto, contínua. Podemos então fazer o cálculo directo de $\lim\limits_{x\to 1} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) = 0$ e também de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^3-x^2-x+1}$, o que dá uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Factorizando o polinómio no denominador da forma $P(x) = (x-1)Q(x)$ para tentar levantar a indeterminação, usando a Regra de Ruffini, obtemos

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & & & \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

isto é, $x^3-x^2-x+1 = (x-1)(x^2-1)$, o que dá $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^3-x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(x-1)(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(x^2-1)}$. Este último limite continua a dar uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Vamos tentar usar a Regra de Cauchy para resolver este limite. Seja $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ e $g(x) = x^2-1$. Sabemos que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ dá uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Consideremos o intervalo $I =]0, +\infty[$ ou outro da forma $I =]a, b[$ onde $0 < a < 1$ e $b > 1$, tal que $1 \in I$ e em $I \setminus \{1\}$ a função $g'(x) = 2x$ não se anule. Neste intervalo as funções $f(x)$ e $g(x)$ são diferenciáveis pois $f(x)$ é a composição da função diferenciável $\cos(x)$ com o monómio $\frac{\pi}{2}x$, estando este no domínio da função $\cos(x)$ que é $\mathbb{R}$, e $g(x)$ é um polinómio.

A derivada da função $f(x)$ é $f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ e está definida em $I \setminus \{1\}$ e a derivada de $g(x)$ é $g'(x) = 2x$ que está definida e não se anula em $I \setminus \{1\}$.

Vamos agora calcular o limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{\pi}{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Podemos então concluir, pela Regra de Cauchy, que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(x^2-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{\pi}{4}.$$

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com expressão

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x+1} + x + 1}{x^2 + 1} & x < 0 \\ \\ x^2 - x\sin(\pi x) + 2 & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de f.

b) Estude a diferenciabilidade de f indicando $D_{f'}$, o maior domínio possível para a sua derivada, e a expressão de f' nesse domínio.

Resolução:

a) **Primeiro ramo:** A função e^x é uma função básica e, portanto contínua. A sua composição com o polinómio $x+1$ é também contínua e está definida pois o polinómo é uma função contínua e está sempre no domínio da exponencial que é $\mathbb{R}$. A soma e o quociente dessa função composta com dois polinómios é ainda uma função contínua. Para além disso a função no denominador nunca se anula pois $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Portanto a função $\frac{e^{x+1}+x+1}{x^2+1}$ é contínua em $\mathbb{R}$ e podemos concluir que $f(x)$ é contínua em $]-\infty, 0[$.

Segundo ramo: A função $x^2 - x\sin(\pi x) + 2$ é elementar e, portanto, contínua em $\mathbb{R}$. É elementar pois é obtida a partir das funções básicas: função $\sin(x)$ composta com o monómio πx (sempre no domínio $\mathbb{R}$ da função $\sin(x)$), monómio x^2 e função constante 2 (por adição), e identidade (por multiplicação). Logo f é contínua em $]0, +\infty[$.

Ponto $\boldsymbol{x = 0}$: No ponto $x = 0$, o limite lateral à esquerda

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{x+1} + x + 1}{x^2 + 1} = \dfrac{e^{0+1} + 0 + 1}{0 + 1} = e + 1$ difere do valor da função no ponto: $f(0) = 0 - 0 \times \sin(0) + 2 = 2$, logo a função $f(x)$ não é contínua em 0. O cálculo directo do limites lateral é possível pois a função $\frac{e^{x+1}+x+1}{x^2+1}$ é contínua tal como mostrado atrás.

Conclusão: A função $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e descontínua em $x = 0$.

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

b) **Ponto $x = 0$:** Pela alínea anterior sabemos que f não é contínua em $x = 0$, logo f não é diferenciável em $x = 0$, isto é $0 \notin D_{f'}$.

Primeiro ramo: A função e^x é uma função básica e, portanto diferenciável. A sua composição com o polinómio $x+1$ é também diferenciável pois o polinómo é uma função diferenciável. A soma e o quociente dessa função composta com dois polinómios é ainda uma função diferenciável. Portanto $f(x)$ é diferenciável em $]-\infty, 0[$. Vamos calcular a expressão da derivada de f neste intervalo:

$$f'(x) = \frac{\left(e^{x+1}+x+1\right)'\left(x^2+1\right)-\left(e^{x+1}+x+1\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{\left(e^{x+1}+1\right)\left(x^2+1\right)-2x\left(e^{x+1}+x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Segundo ramo: A função $x^2 - x\sin(\pi x) + 2$ é elementar e, portanto, diferenciável. É elementar pois é obtida a partir das funções básicas: função $\sin(x)$ composta com o monómio πx, monómio x^2 e função constante 2 (por adição), e identidade (por multiplicação). Logo f é diferenciável em $]0, +\infty[$. A expressão da derivada de f neste intervalo é:

$$f'(x) = \left(x^2 - x\sin(\pi x) + 2\right)' = 2x - \sin(\pi x) - \pi x\cos(\pi x).$$

Conclusão: A função $f(x)$ tem derivada com domínio $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e com expressão

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(e^{x+1}+1\right)\left(x^2+1\right) - 2x\left(e^{x+1}+x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} & x < 0 \\[2ex] 2x - \sin(\pi x) - \pi x\cos(\pi x) & x > 0 \end{cases}$$

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável tal que $f(b) > f(a)$. Suponha que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) < 0$. Prove que a função derivada de f, f' tem pelo menos uma raíz no intervalo $[a, b]$.

Resolução: Como a função f é duas vezes diferenciável, então é diferenciável e podemos aplicar o teorema de Lagrange no intervalo $[a, b]$ que garante a existência de $\rho \in]a, b[$ tal que

$$f'(\rho) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0,$$

pois $b - a > 0$ e também $f(b) - f(a) > 0$, por hipótese. Para além disso, como f' é contínua no intervalo $[a, b]$ e existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) < 0$ e $\rho \in]a, b[$ tal que $f'(\rho) > 0$, concluímos que f' muda de sinal no intervalo $I := [\min(c, \rho), \max(c, \rho)]$ e pelo teorema de Bolzano, concluimos que f' tem pelo menos uma raiz no intervalo $I \subset [a, b]$.

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

4. Determine a família de primitivas das seguintes funções reais de variável real:

a) $xe^{x^2+1} + e^x \cos(5e^x) - x^3$.

b) $(3x+5)e^{-3x}$.

Resolução:

a) Temos

$$\int \left(xe^{x^2+1} + e^x \cos(5e^x) - x^3 \right) dx =$$

$$= \int xe^{x^2+1} dx + \int e^x \cos(5e^x) dx - \int x^3 dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2+1} dx + \frac{1}{5} \int 5e^x \cos(5e^x) dx - \int x^3 dx =$$

$$= \frac{e^{x^2+1}}{2} + \frac{\sin(5e^x)}{5} - \frac{x^4}{4} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

b) b) Temos $\int (3x+5)e^{-3x} dx = \int 3xe^{-3x} dx + \int 5e^{-3x} dx$. O segundo integral indefinido é igual a $-\frac{5}{3} \int -3e^{-3x} dx = -\frac{5}{3} e^{-3x} + C, \ C \in \mathbb{R}$.

Vamos fazer a primitivação por partes de $\int 3xe^{-3x} dx$ sendo $u' = e^{-3x}$ e $v = 3x$, e tendo $u = -\frac{1}{3} e^{-3x}$ e $v' = 3$. Logo

$$\int \underbrace{3x}_{v} \underbrace{e^{-3x}}_{u'} dx = \underbrace{-\frac{1}{3} e^{-3x}}_{u} \underbrace{3x}_{v} - \int \underbrace{-\frac{1}{3} e^{-3x}}_{u} \times \underbrace{3}_{v'} dx =$$

$$= -x\, e^{-3x} + \int e^{-3x} dx = -x\, e^{-3x} - \frac{1}{3} e^{-3x} + C =$$

$$= -\left(x + \frac{1}{3} \right) e^{-3x} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Portanto a família de primitivas da função é

$$-\frac{5}{3} e^{-3x} - \left(x + \frac{1}{3} \right) e^{-3x} + C = -(x+2)e^{-3x} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

5. Calcule a área da região definida por

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 4\,,\ \ 0\le y\le \cos(4\pi x)+2(x+1)+e^{-x}\right\}.$$

Resolução:A área é dada por

$$\int_0^4 \left(\cos(4\pi x)+2(x+1)+e^{-x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^4 4\pi\cos(4\pi x)\,dx \;+\; 2\int_0^4 (x+1)\,dx \;-\; \int_0^4 -e^{-x}\,dx =$$

$$= \left[\frac{\sin(4\pi x)}{4\pi}+2\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-e^{-x}\right]_0^4 =$$

$$= \frac{\sin(16\pi)}{4\pi}+2\left(\frac{16}{2}+4\right)-e^{-4}-\frac{\sin(0)}{4\pi}-2\left(\frac{0}{2}+0\right)+e^0 =$$

$$= \frac{\sin(16\pi)}{4\pi}+24-e^{-4}+1 = 25-e^{-4}.$$

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt