Matemática Preparatória | 21160 | Resolução

1. Simplifique a expressão $\frac{3x^7y^{-3}}{2x^{-2}y^{-3}} \times \frac{x}{y}$.

   Resolução: $\frac{3x^7y^{-3}}{2x^{-2}y^{-3}} \times \frac{x}{y} = \frac{3x^7}{2x^{-2}} \times \frac{x}{y} = \frac{3x^8}{2x^{-2}y} = \frac{3x^{8-(-2)}}{2y} = \frac{3x^{10}}{2y}$.

2. Decomponha em factores a expressão

$$(x^2 - x - 6)(x - 3)(x^2 - 4)$$

   de forma a que os factores sejam polinómios de grau 1.

   Resolução: Comecemos por calcular os zeros de $x^2 - x - 6$. Pela fórmula resolvente temos que $x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-6)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$. Logo $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$.

   Aplicando um caso notável (diferença entre quadrados) sabemos que $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

   Obtemos assim a seguinte fatorização em polinómios de grau 1: $(x^2 - x - 6)(x-3)(x^2-4) = (x-3)(x+2)(x-3)(x-2)(x+2)$.

3. Escreva a expressão $\ln \sqrt{2} + \ln \sqrt[3]{2} - (\log_2 \frac{\sqrt{e}}{4} + \log_2 \frac{1}{\sqrt{e}})$ na forma $a \ln b + c$ com a, b, c números racionais.

   Resolução: Temos que

   $\ln \sqrt{2} + \ln \sqrt[3]{2} - (\log_2 \frac{\sqrt{e}}{4} + \log_2 \frac{1}{\sqrt{e}}) = \ln(2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}}) - \log_2(\frac{\sqrt{e}}{4\sqrt{e}}) = \ln 2^{\frac{5}{6}} - \log_2 4^{-1} = \ln 2^{\frac{5}{6}} - \log_2 2^{-2} = \frac{5}{6} \ln 2 - (-2) = \frac{5}{6} \ln 2 + 2$.

4. Resolva a seguinte inequação:

$$|2 - x| + |x + 7| \geq 10$$

   Resolução: Encontrando os valores de x onde os módulos presentes na expressão se anulam podemos construir a seguinte tabela:

		-7		2	
$2-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x+7$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Em $x = -7$, temos que $|2-(-7)| + |-7+7| = 9$ logo $x = -7$ não é solução da inequação. O mesmo se passa com $x = 2$, pois $|2-2| + |2+7| = 9$ também não sendo solução da inequação.

Nos restantes pontos, guiados pela tabela, exprimimos a expressão dos módulos da seguinte forma:

$$|2-x| + |x+7| = \begin{cases} 2-x-x-7, & x < -7 \\ \\ 2-x+x+7, & -7 < x < 2 \\ \\ x-2+x+7, & x > 2 \end{cases}$$

ou seja

$$|2-x| + |x+7| = \begin{cases} -2x-5, & x < -7 \\ \\ 9, & -7 < x < 2 \\ \\ 2x+5, & x > 2 \end{cases}$$

Como $-2x-5 \geq 10 \Leftrightarrow -2x \geq 15 \Leftrightarrow x \leq -\frac{15}{2}$ e $2x+5 \geq 10 \Leftrightarrow 2x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$ (estando todos os valores dentro dos respetivos ramos), obtemos assim o seguinte conjunto solução para a inequação dada:

c.s.$=]-\infty, -\frac{15}{2}] \cup [\frac{5}{2}, +\infty[$.

5. Considere a função real de variável real

$$f(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{x^2-2x}$$

Identifique o domínio e calcule os seus zeros.

Resolução: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 5-x \geq 0 \wedge x^2-2x \neq 0\}$.

Temos que $5-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$ e $x^2-2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 2$.

Logo $D_f =]-\infty, 5] \setminus \{0, 2\} =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, 5]$.

Encontremos os zeros da função:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5-x} = 0 \wedge x^2 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow 5 - x = 0 \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 2) \Leftrightarrow x = 5$.

Logo 5 é o único zero da função f.

6. Considere os seguintes elementos de uma progressão aritmética: $u_7 = 10$ e $u_{11} = 16$. Calcule a soma dos primeiros 27 termos.

   Resolução: Sabemos que numa progressão aritmética de razão d se tem $u_{l-n} = u_l - nd$ com $0 \leq n \leq l$.

   Assim $u_{11-4} = u_7 = u_{11} - 4d$ e portanto $10 = 16 - 4d \Leftrightarrow -6 = -4d \Leftrightarrow d = \frac{6}{4} \Leftrightarrow d = \frac{3}{2}$.

   Encontrada a razão da progressão aritmética podemos calcular o seu termo inicial através da fórmula $u_1 = u_l - (l-1)d$, logo $u_1 = u_{11} - (11-1)d = 16 - 10 \times \frac{3}{2} = 1$.

   Como $u_n = u_1 + (n-1)d$ temos que $u_{27} = 1 + 26 \times \frac{3}{2} = 1 + 39 = 40$.

   Uma vez que $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ temos que $S_{27} = \frac{27}{2}(1+40) = \frac{27}{2} \times 41 = \frac{1107}{2} = 553.5$. Isto é, a soma dos primeiros 27 termos é 553.5.

FIM