

ATIVIDADE FORMATIVA 1 (21030)

Enunciado (baseado no e-fólio de 2017/2018 da Prof^a Marisa Resende)

1. Considere a sucessão x_n tal que:

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad n x_{n+1} = 1 - \frac{1}{x_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Mostre que x_n é convergente e determine o seu limite.

b) Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left((-1)^n \cos(n^2 + 1) \sin(\sqrt[n]{x_n}) \right)$.

c) Sabendo que x_n é subsequência de uma sucessão limitada y_n , podemos concluir que y_n é convergente?

2. Considere uma sucessão a_n , tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Considere ainda as sucessões b_n e c_n tais que:

$$\begin{cases} b_n = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} & , \quad n \in \mathbb{N} \\ c_n = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} & , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

As sucessões b_n e $(n c_n^{\frac{1}{n}})$ são assintoticamente iguais? Justifique.

3. Determine (se existirem) os limites das sucessões seguintes:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(n^3)}{3 + \log(n^3)} \right)^{\log(\sqrt{n})}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n^s + 1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{n^s + n}} \right), \quad s \geq 2$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e + 4e^2 + \cdots + n^2 e^n}{n^2 3^n}$

4. Determine o valor da constante $r > 0$, tal que :

$$r^{-1} + r^{-4} + r^{-7} + \cdots = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots$$

5. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ uma série divergente, com $a_n, b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Indique o valor lógico das proposições seguintes, justificando a sua resposta:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2}{1 + b_n}$ é convergente.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n + \frac{1}{b_n} \right)$ é convergente.

6. Determine, justificando, a natureza (divergente, absolutamente convergente ou simplesmente convergente) das séries seguintes:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{[2 + (-1)^n]^n}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log^3(n)}{\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2n^2 \left(\frac{n^2 + 5}{3n^2 + 2} \right)^{\log(n^n)}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n^2} \right)^n (2n)!$

FIM