



Matemática Finita | 21082

Data e hora de realização

27 de setembro de 2021, às 15h00 de Portugal Continental

Hora limite de entrega

18h00 de Portugal Continental

Temas

Todos os temas programáticos de Matemática Finita

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total desta prova é de 20 valores.
2. Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
3. Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
4. A distribuição da cotação é a seguinte:

1.	2.	3.	4.	5.
5,0 val.	3,8 val.	3,5 val.	2 val.	5,7 val.

Normas a respeitar

Deve redigir o exame na Folha de Resolução disponibilizada e preencher todos os dados do cabeçalho.

Escreva sempre com letra legível.

As suas respostas às questões desta prova não devem ultrapassar 12 páginas A4.

Depois de ter realizado o exame produza um documento em **formato PDF** e nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação de Exame, segundo o exemplo apresentado: 000000exame.pdf

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo Exame até à hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 10 MB.

Votos de bom trabalho!

Maria João Oliveira

Enunciado

1. Pretende-se construir números com 8 algarismos mas utilizando apenas os algarismos 1, 2, 3 e 4.

1.1. Quantos números podemos construir?

1.2. Quantos números podemos construir de modo que o algarismo 1 apareça exatamente 3 vezes e o algarismo 2 apareça exatamente duas vezes?

1.3. Quantos números podemos construir de modo que cada um dos algarismos 1, 2, 3 e 4 apareça pelo menos uma vez?

2.

2.1. Sem utilizar o método de indução matemática, mostre que

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n}, \quad n \geq 1.$$

2.2. Determine o valor da soma

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!(k-1)!((n-k)!)^2}.$$

3.

3.1. De modo eficiente mostre que $\text{mdc}(896145, 576) = \text{mdc}(465, -111)$.

3.2. Averigue se existem soluções inteiras da equação

$$465x - 111y = 18.$$

4. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\text{mdc}(a^n, b^n) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$

verifique que a e b são números primos entre si.

5. Considere a sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por

$$a_n = 797a_{n-1} + 798a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

para $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$.

5.1. Determine $a_n, n \in \mathbb{N}$.

5.2. Prove que

$$a_n \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

por recurso...

5.2.1. ... ao método de indução matemática.

5.2.2. ... a argumentos de divisibilidade.

5.3. Conclua que $a_n \in \mathbb{N}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

FIM