# Álgebra Linear II | 21003

**Exame (epócha normal)**: Proposta de resolução

1. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Indique, justificando, qual a forma canónica de Jordan, $J$, semelhante à matriz $A$.

   **Resolução:** Calculemos o polinómio característico da matriz $A$:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_5| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^5,$$

   porque A é uma matriz triangular. Logo, o valor próprio único da matriz é a solução da equação $p_A(\lambda) = 0$, isto é $\lambda = 1$ com multiplicidade algébrica ma$(1) = 5$. Vamos agora calcular a multiplicidade geométrica de $1$.

$$A - 1I_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Logo mg$(1) = 5-$rank$(A - 1I_5) = 5 - 3 = 2$.

   Atendendo às multiplicidades algébrica e geométrica sabemos que a matriz de Jordan $J$ que procuramos é constituida por dois blocos. Temos duas possibilidades: um tem dimensão 1 e o outro dimensão 4; um tem dimensão 2 e o outro dimensão 3.

Temos

$$(A - 1I_5)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0_5,$$

$$(A - 1I_5)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_5.$$

Portanto, a dimensão do maior bloco de Jordan é igual a $3$ e obtemos

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Determine a matriz invertível $Q$ tal que $J = Q^{-1}AQ$.

**Resolução:** Para obter a matriz $Q$ precisamos de calucular os vectores próprios e vectores próprios generalizados associados ao valor próprio $1$.

Considere $E_1$. Seja $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$. Temos

$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^5 : (A - 1I_5)x = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^5 : 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, 6x_4 + 7x_5 = 0, 8x_5 = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^5 : x_3 = x_4 = x_5 = 0\}$

$= \{[x_1, x_2, 0, 0, 0]^T : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \langle [1, 0, 0, 0, 0]^T, [0, 1, 0, 0, 0]^T \rangle.$

O vector próprio $u = [1, 0, 0, 0, 0]^T$ está a mesma cadeia de Jordan do vector próprio generalizado $p$ tal que $(A - 1 \cdot I_5)p = u$. Obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p_5 & = & 0 \\ p_4 & = & 0 \\ p_3 & = & 1/3 \end{cases}$$

Ao escolher uma solução com $p_1 = p_2 = 0$, obtemos o vetor próprio generalizado $v = [0, 0, 1/3, 0, 0]^T$.

Analogamente, o vector $v$ está na mesma cadeia de Jordan do vector próprio generalizado $q$ tal que $(A - 1 \cdot I_3)q = v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcc} v_5 & = & 1/24 \\ v_4 & = & -7/144 \\ v_3 & = & -1/126 \end{array} \right.$$

Novamente, com $v_1 = v = 2 = 0$, obtemos o vetor próprio generalizado $w = [0, 0, -1/216, -7/144, 1/24]^T$.

Finalmente, o vector próprio $w = [0, 1, 0, 0, 0]^T$ está a mesma cadeia de Jordan do vector próprio generalizado $q$ tal que $(A - 1 \cdot I_5)q = w$. Obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcc} q_5 & = & 0 \\ q_4 & = & 1/6 \\ q_3 & = & -2/9 \end{array} \right.$$

Com $q_1 = q = 2 = 0$, obtemos o vetor próprio generalizado $w = [0, 0, -2/9, 1/6, 0]^T$.

Juntando o vetor próprio e os vetores próprios generalizados, obtemos a matriz de semelhança $Q$:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{126} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{7}{144} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{126} \end{bmatrix}.$$

2. Considere o espaço $X = \mathbb{R}_2[x]$ dos polinómios reais de grau não superior a $2$. Sendo $p$ e $q$ dois elementos arbitrários de $X$ considere a função $(\cdot|\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por $(p|q) = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)$.

   a) Mostre que $(\cdot|\cdot)$ é um produto interno em $X$.

      **Resolução:** Sejam $p, q, r \in \mathbb{R}_2[x]$, $s \in \mathbb{R}$.

      A1. $(p + r|q) = (p + r)(0)q(0) + (p + r)'(0)q'(0) + (p + r)''(0)q''(0)$
      $= (p + r)(0)q(0) + (p' + r')(0)q'(0) + (p'' + r'')(0)q''(0)$

$= (p(0) + r(0))q(0) + (p'(0) + r'(0))q'(0) + (p''(0) + r''(0))q''(0)$
$= p(0)q(0)+r(0)q(0)+p'(0)q'(0)+r'(0)q'(0)+p''(0)q''(0)+r''(0)q''(0)$
$= p(0)q(0)+p'(0)q'(0)+p''(0)q''(0)+r(0)q(0)+r'(0)q'(0)+r''(0)q''(0) = (p|q) + (r|q)$.

Logo, A1 é valido.

A2. $(sp|q) = (sp)(0)q(0) + (sp)'(0)q'(0) + (sp)''(0)q''(0)$
$= (sp)(0)q(0) + (sp')(0)q'(0) + (sp'')(0)q''(0)$
$= s(p(0))q(0) + s(p'(0))q'(0) + s(p''(0))q''(0)$
$= s(p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)) = s(p|q)$

Logo, A2 é valido.

A3. $(p|q) = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)$.
$= q(0)p(0) + q'(0)p'(0) + q''(0)p''(0) = (q|p)$.

Logo, A3 é valido.

A4. $(p|p) = p(0)p(0) + p'(0)p'(0) + p''(0)p''(0)$
$= (p(0))^2 + (p'(0))^2 + (p''(0))^2 \geq 0$.

Seja $(p|p) = 0$. Então $p(0) = 0$, $p'(0) = 0$, $p''(0) = 0$.

Temos $p(x) = ax^2+bx+c$ com alguns $a, b, c \in \mathbb{R}$, e $p'(x) = 2ax+b$, $p''(x) = 2a$.

$0 = p(0) = a0^2 + b0 + c = c$.

$0 = p'(0) = 2a0 + b = b$

$0 = p''(0) = 2a \Rightarrow a = 0$, e $p = 0x^2 + 0x + 0$.

Portanto, $p$ é o zero do espoço $X$ e A4 é valido.

A1-A4 são validos. Portanto $(\cdot|\cdot)$ é um produto interno em $X$.

b) Considere a aplicação linear $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(p) = p(0) + p'(0) + p''(0)$. Existe um único elemento $u \in X$ tal que $\varphi(p) = (p|u), \forall p \in X$. Determine $u$.

**Resolução:** $(p|u) = p(0)u(0) + p'(0)u'(0) + p''(0)u''(0)$.

Portanto $(p|u) = \varphi(p)$ se $u(0) = u'(0) = u''(0) = 1$.

Temos $u(x) = dx^2 + ex + f$ com alguns $d, e, f \in \mathbb{R}$, e $u'(x) = 2dx + e$, $u''(x) = 2d$.

$1 = u(0) = d0^2 + e0 + f = f$.

$1 = u'(0) = 2d0 + e = e$

$1 = u''(0) = 2d \Rightarrow d = 1/2$

Portanto $u = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

c) Obtenha, usando o proceso Gram-Schmidt, a partir da base $\mathcal{B} = \{1 - x^2, 1 + x^2, x\}$, uma base de $X$ ortogonal para $(\cdot|\cdot)$.

**Resolução:** Sejam $v_1 = 1 - x^2, v_2 = 1 + x^2, v_3 = x$.

Temos $u_1 = v_1 = 1 - x^2$. Porque
$|u_1| = \sqrt{(u_1|u_1)} = \sqrt{(u_1(0))^2 + (u_1'(0))^2 + (u_1''(0))^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$, normalizamos $u_1$ para obter

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1 - x^2).$$

Pelo processo de Gram-Schmidt, calculamos um vector ortogonal
$u_2 = v_2 - (n_1|v_2)n_1 = (1 + x^2) - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1 - x^2)|1 + x^2\right)\frac{1}{\sqrt{5}}(1 - x^2)$
$= (1 + x^2) - \frac{1}{5}\left(1 - x^2|1 + x^2\right)(1 - x^2)$
$= (1 + x^2) - \frac{1}{5}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 2)(1 - x^2)$
$= (1 + x^2) - \frac{-3}{5}(1 - x^2) = \frac{8}{5} + \frac{2}{5}x^2$.

Temos $|u_2| = \sqrt{\frac{8}{5}^2 + 0^2 + (2\frac{2}{5})^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}$, e normalizamos para obter

$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2 + \frac{1}{2}x^2\right).$$

Aplicando o processo mais uma vez, obtemos
$u_3 = v_3 - (n_1|v_3)n_1 - (n_2|v_3)n_2$
$= x - (\frac{1}{\sqrt{5}}(1 - x^2)|x)\frac{1}{\sqrt{5}}(1 - x^2) - (\frac{1}{\sqrt{5}}(2 + \frac{1}{2}x^2)|x)\frac{1}{\sqrt{5}}(2 + \frac{1}{2}x^2)$
$= x - \frac{1}{5}(1 - x^2|x)(1 - x^2) - \frac{1}{5}(2 + \frac{1}{2}x^2|x)(2 + \frac{1}{2}x^2)$
$= x - \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0)(1 - x^2) - \frac{1}{5}(2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)(2 + \frac{1}{2}x^2) = x$
e normalizamos para obter

$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{(x|x)}}x = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}}x = x.$$

Então $(n_1, n_2, n_3)$ é uma base ortonormada de $X$.

3. Considere que $\mathbb{C}^3$ está munido do produto interno canónico e seja $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ o endomorfismo definido por

$$f(x, y, z) = (2x + (1 - i)y, (3 + 2i)x - 4iz, 2ix + (4 - 3i)y - 3z).$$

a) Determine $f^*$, o endomorfismo adjunto de $f$.

**Resolução:** A matriz que representa $f$ com respeito à base canónica é

$$D = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 0 \\ 3+2i & 0 & -4i \\ 2i & 4-3i & -3 \end{bmatrix}.$$

Estando numa base ortonormada, o endomorfismo adjunto de $f$ será representado pela matriz

$$D^* = \mathcal{M}(f^*, \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} 2 & 3-2i & -2i \\ 1+i & 0 & 4+3i \\ 0 & 4i & -3 \end{bmatrix}.$$

isto é $f^*(x, y, z) = (2x+(3-2i)y-2iz, (1+i)x+(4+3i)z, 4iy-3z)$.

b) Diga, justificando, se $f$ é um endomorfismo auto-adjunto.

**Resolução:** Os endomorfismos $f$ e $f^*$ são representados, numa base ortonormada, pelas matrizes $D$ e $D^*$. Como $D \neq D^*$ então $f$ não é auto-adjunto.

4. Considere a forma bilinear $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = (g(x))|y,$$

onde $\cdot|\cdot$ é o produto interno canónico em $\mathbb{R}^3$ e onde $g$ é um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação a $\mathcal{B}_c$, a base canónica de $\mathbb{R}^3$, é

$$A = \mathcal{M}(g; \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz $G_{f,\mathcal{B}_c}$, da forma bilinear $f$ em relação a $\mathcal{B}_c$, a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

**Resolução:** Sejam $x, y \in \mathbb{R}^3$, $z = g(x)$ e, portanto, $z = Ax$. Logo, $f(x, y) = (g(x))|y = z|y = z^T I_3 y$ (pois $\mathcal{B}_c$ é ortonormada para $\cdot|\cdot$) $= z^T y = (Ax)^T y = x^T A^T y$ e concluimos que

$$G_{f,\mathcal{B}_c} = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Considere o referencial canónico em $\mathcal{R}^3$ e as seguintes entidades geométricas:

$$\alpha:\ (x,y,z)=(2+2a-3b,5-2a+3b,4a-6b),\forall a,b\in\mathbb{R},$$

$$\beta:\ (3,1,2)+\langle(2,5,10)\rangle,\ \gamma:\ 6x-z=2$$

Sendo $\delta=\beta\cap\gamma,\ \epsilon=\alpha\cap\beta$ esclareça, justificando detalhadamente, a natureza de $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ e $\epsilon$ (isto é, quais são rectas, quais são planos, etc).

**Resolução:** $\alpha=\{(2,5,0)+a(2,-2,4)+b(-3,3,-6):a,b\in\mathbb{R}\}$

$=\{(2,5,0)+\frac{a}{3}(6,-6,12)+\frac{-b}{2}(6,-6,12):a,b\in\mathbb{R}\}$

$=\{(2,5,0)+(\frac{a}{3}-\frac{b}{2})(6,-6,12):a,b\in\mathbb{R}\}$

$=\{(2,5,0)+c(6,-6,12):c\in\mathbb{R}\}$

$=(2,5,0)+\langle(6,-6,12)\rangle.$

Portanto, $\alpha$ é uma recta.

$\beta$ tem a mesma forma, portanto, é uma recta.

$\gamma$: Estando em $\mathbb{R}^3$, a equação $6x+z=2$ define um plano (paralelo ao eixo dos yy).

$\delta$: Os pontos em $\beta$ têm a forma $(3+2a,1+5a,2+10a)$. Logo, os pontos em $\beta\cap\gamma$ satisfazem $6(3+3a)+(2+10a)=2\Leftrightarrow a=\frac{-9}{19}$, a solução única. Portanto $\delta$ é um ponto.

$\epsilon$: Os pontos em $\alpha$ têm a forma $(2+6c,5-6c,12c)$, e os pontos em $\beta$ têm a forma $(3+2a,1+5a,2+10a)$. Logo os pontos em $\epsilon$ satisfazem $2+6c=3+2a$, $5-6c=1+5a$, $12c=2+10a$.

$2+6c=3+2a\Rightarrow a=3c-1/2$. Com $12c=2+10a$, obtemos $12c=2+10(3c-1/2)=30c-3\Rightarrow c=1/6\Rightarrow a=3c-1/2=0$.

Mas $5-6c=4\neq 1=5a$, e a nossa sistema não tem solução.

Portanto, $\epsilon$ é vazio.

**FIM**