U.C. 21002

Álgebra Linear I

27 de fevereiro de 2015

- O exame é composto por **5** grupos de questões e respetivas alíneas, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo **I** (escolha múltipla) deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos **II**, **III**, **IV** e **V** deverão ser respondidas no Caderno de Prova.
- Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de quaisquer elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o exame tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- Com exceção das questões do grupo **I** (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que correctos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo **I** (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo **I** é de 0 valores. As restantes questões terão as cotações seguintes:

II	**III**	**IV**	**V**
4.0 val.	3.0 val.	7.0 val.	2.0 val.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando × no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

Questão 1

Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$A = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : xy = 0\}, \qquad B = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0\},$$
$$C = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + w = 0\}, \quad D = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z - w = 0\}.$$

Então:

- ☐ **a)** Os conjuntos A, B, C e D são subespaços de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ **b)** Só os conjuntos B, C e D são subespaços de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ **c)** Só os conjuntos C e D são subespaços de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ **d)** O conjunto D não é subespaço de $\mathbb{R}^4$.

Questão 2

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz que satisfaz $A^2 + A - I_n = 0$, onde I_n designa a matriz identidade de ordem n. Então:

- ☐ **a)** $A^{-1} = A + I_n$.
- ☐ **c)** $A^{-1} = A$.
- ☐ **b)** $A^{-1} = A^2$.
- ☐ **d)** $A^{-1} = I_n$.

Questão 3

Sejam F e G subespaços de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que

$$F = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ e } G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Então:

- ☐ **a)** $\dim(F + G) = 3$.
- ☐ **c)** $\dim(F + G) = 4$.
- ☐ **b)** $\dim(F \cap G) = 0$.
- ☐ **d)** $\dim F = 1$.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

Questão 4

Seja E um espaço vetorial e (u, v, w) uma sequência linearmente independente. Então:

☐ **a)** Os vetores $u, u+v$ e $v+w$ são linearmente independentes.

☐ **b)** Os vetores u e $u-v$ são linearmente dependentes.

☐ **c)** Os vetores u, v e w formam uma base de E.

☐ **d)** Existe $\alpha \neq 0$ tal que $u = \alpha v$.

Questões de desenvolvimento

RESPONDA AOS GRUPOS SEGUINTES NO CADERNO DE PROVA

> Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ definida por $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Então 1 é valor próprio de A se e sómente se $a = 0$ ou $b = 0$.

b) Se $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é tal que $C^2 = C$ então $C = I_n$.

III. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x \qquad\quad - 6z = -8 \\ \qquad\quad y + 2z = 3 \\ 3x + 6y - 2z = -4 \end{cases}.$$

Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando claramente todas as operações que efetuar,* discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

IV. Considere as matrizes

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e a transformação linear $T \colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(M_1) = M_2, \; T(M_2) = M_3 + M_4, \; T(M_3) = M_2 - M_1, \; T(M_4) = M_1.$$

a) Mostre que as matrizes M_1, M_2, M_3 e M_4 constituem uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Justifique que T está bem definida.

c) Seja $\mathcal{B}$ a base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ da alínea **a)**. Determine a matriz $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \mathcal{B})$, que representa T em relação à base $\mathcal{B}$ em ambos os espaços de partida e de chegada.

d) Calcule os valores próprios de $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ e os correspondentes subespaços próprios[1].

e) Determine a nulidade (dimensão do núcleo) e a característica (dimensão da imagem) de T.

f) Será T diagonalizável? Justifique.

V. Seja E um espaço vetorial real de dimensão $n > 1$, e $T \colon E \to E$ uma transformação linear.

a) Suponha que existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $T^2(v) = \mu T(v), \; \forall v \in E$
(ou seja $T(T(v)) = \mu T(v), \; \forall v \in E$).
Determine os possíveis valores próprios da transformação T.

b) Nas condições da alínea anterior mostre que se $\mu \neq 1$ então a transformação linear definida por

$$S(v) = v - T(v)$$

é invertível.

c) Prove que se a característica de T for 1, então existe μ nas condições da alínea **a)**.

d) Será que se existir $\mu \in \mathbb{R}$ nas condições da alínea **a)** então a característica de T é necessariamente igual a 1?

FIM

---

[1] Se não resolveu a alínea **c)** resolva esta alínea considerando a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.