21073 - Introdução às probabilidades e estatística bayesianas

Ano lectivo 2015/16

Docente: António Araújo

e-fólio B (8 a 15 de Janeiro)

,

Para a resolução do e-fólio, aconselha-se que:

- Verifique se o ficheiro que recebeu está correcto. O e-fólio consiste de 2 páginas com 3 problemas e termina com a palavra FIM.
- Como o e-fólio tem um tempo prolongado de resolução, espera-se que as respostas que enviar estejam legíveis, com boa apresentação e organização. Deve fazer à parte o trabalho auxiliar e enviar apenas uma versão final, "limpa". Deve digitalizar a sua resolução de forma legível, ou executá-la directamente em formato digital (aceita-se word, pdf, ou scans em jpeg, png ou tiff - se usar varios ficheiros envie apenas um arquivo com todos eles, em rar ou zip). Respostas ilegíveis não serão cotadas, por isso verifique bem o seu ficheiro antes de enviar.
- Justifique cuidadosamente todas as suas respostas. Apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio.
- Tenha em atenção o prazo de entrega do e-fólio e as indicações para submeter a resolução disponibilizadas na sala de aulas virtual.
- O e-fólio é um trabalho individual. Pode utilizar recursos externos (pesquisa online, literatura, etc) mas não pode pedir ajuda a terceiros nem discutir os problemas com os seus colegas.

Critérios de avaliação e cotação:

- Este e-fólio tem a cotação total de 4 valores, assim distribuídos: Cada questão vale 4/3 de valor.

Por favor preencha os seus dados:

- Nome:
- B.I:
- Nº de Estudante'
- Curso:

GRUPO I

Problema 1. *Considere o seguinte modelo em que* $\lambda > 0$ *é um parâmetro real desconhecido:*

$$p(x|\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda 2^\lambda}{x^{\lambda+1}}, & para\ x \geq 2 \\ 0, & para\ x < 2 \end{cases}$$

a) Mostre que a família $Gama(\alpha, \beta)$ *é família conjugada de priors para este modelo, e obtenha a regra de actualização dos parâmetros* α, β.

Nota: Recorde que

$$Gama(\lambda|\alpha, \beta) \propto \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}.$$

b) Suponha que λ *tinha a distribuição prévia* $p(\lambda) = Gamma(2.5, 0.8)$. *Observou-se a amostra*

$$X = \{46, 4, 16, 621, 96\}$$

Calcule a distribuição posterior de λ. *Represente graficamente as distribuições prévias e posteriores (usando por exemplo a linguagem R). Calcule os seus valores médios e variâncias.*

Problema 2. *A probabilidade de uma certa peça ser fabricada com defeito segue um modelo binomial* $X \sim B(\theta, n)$ *em que o prior* $p(\theta)$ *é uma mistura convexa de Betas da forma*

$$p(\theta) = 0.1 Beta(6, 5) + 0.9 Beta(6, 2)$$

Diga qual é a distribuição posterior de θ *se observar uma sequência de 30 peças e 20 estiverem avariadas.*

Problema 3. *Suponha que a posição de um ponto material sobre uma recta infinita é descrita por uma variável aleatória normal com variância conhecida,* $X = N(\mu, \sigma^2 = 9)$*. Suponha que tudo o que sabe sobre o prior* $p(\mu)$ *é que é uma distribuição com média* $\mu_0 = 0$ *e variância* $\sigma_0^2 = 16$*.*

a) Diga qual a forma do prior $p(\mu)$ *que escolheria, e porquê (tendo em conta que quer assumir o mínimo possível).*

b) Actualize o prior obtido em a) tendo em conta que observa a amostra $\overline{X} = \{4, 4.8, 3.7, 2.5, 3.5, 5.1\}$*.*

FIM