Elementos de Álgebra | 21133

Período de Realização

Decorre de 7 a 14 de novembro de 2022

Data de Limite de Entrega

14 de novembro de 2022, até às 23h55 de Portugal Continental

Tema

Conjuntos, funções, relações e grupos

Competências

a) classificar e operar com funções, relações e homomorfismos;

b) reconhecer e trabalhar com grupos e subgrupos.

Trabalho a desenvolver

Deve resolver os quatro exercícios constantes no enunciado. Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total do exame é de 4 valores distribuídos de acordo com a tabela.

questão	$1a$	$1b$	2	$3a$	$3b$	4
cotação	$0,5$	$1,5$	$0,5$	$0,5$	$0,5$	$0,5$

2. Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

3. Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar **oito** páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Wolfram Bentz

Enunciado

1. Sejam $A = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$ e "$\star$" a operação binário com definição

$$x \star y = x \cdot y - 3x - 3y + 12$$

para todos $x, y \in A$ ($\cdot, +, -$ do lado direito estão as operações usuais de multiplicação, adição e subtração de números racionais).

a. Prove que se $x \neq 3$ e $y \neq 3$ então $x \star y \neq 3$ (isto é, $\star$ é uma operação binária EM A)

b. Mostre que (A,$\star$) é um grupo.

2. Sejam $(G, \cdot)$ um grupo finito, e $S \subseteq G$ um subconjunto não vazio de G. Prove que

$$K = \{k \in G : k \cdot s = s \cdot k \text{ para tudo } s \in S\}$$

é um subgrupo de G.

3. No grupo simétrico S_4 considere $S' = \{e, a, b\}$ com

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Justifique que S' não é subgrupo de S_4.

b) Sendo $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, resolva a equação $cxa = b^2$.

4. Seja $f : G \to H$ homomorfismo de grupos em que f é função injetiva, e H é um grupo comutativo. Mostre que G é um grupo comutativo.

FIM