ELEMENTOS DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA | 21037

17 de junho de 2025

Proposta de Resolução

1. O seguinte gráfico de caule-e-folhas representa uma amostra das notas dos exames (0-100) da UC de Análise Estatística em 2000.

5	9
6	3 8 5 6 1
7	6 7 0 5 1 9 4
8	9 2 5 2
9	7 0 2

Legenda: Notas de exame numa escala de 0-100. Sendo que 5|4 representa 54.

1.a) Qual o valor médio das notas? `(0,5 valores)`
$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^{20} x_i = \frac{1521}{20} = 76,05$

1.b) Qual o desvio padrão das notas? `(1 valor)`
Calculando o desvio padrão corrigido ou amostral (estamos perante uma amostra e de pequena dimensão)

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2}{20-1}} = \sqrt{\frac{2258,95}{19}} \cong 10,90$$

1.c) Qual a mediana das notas? `(0,5 valores)`
Existem 20 notas, $n = 20$, portanto $n = 2k \Leftrightarrow k = 10$, e a mediana está entre o valor da 10ª e o valor da 11ª ordem, ou seja entre 75 e 76. A mediana das notas é $\frac{75+76}{2} = 75,5$.

2. O João pratica tiro ao arco aos fins-de-semana, sendo que 25% das vezes acerta no alvo. No passado sábado, o João atirou 6 vezes ao alvo.

2.a) Se X for a v.a. que conta o número de vezes que o João acerta no alvo, qual é a sua distribuição? `(0,5 valores)`
X segue uma distribuição Binomial, $X \sim Bin(6, 1/4)$

$$P(X = i) = \begin{pmatrix} 6 \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{6-i}, \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

2.b) Qual a probabildiade do João ter acertado exatamente 2 vezes no alvo? `(0,75 valores)`

$$P(X = 2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 15\frac{3^4}{4^6} = \frac{1215}{4096} \simeq 0,296631 \simeq 0,30$$

2.c) Qual a probabilidade do João ter acertado mais do que 4 vezes no alvo? `(0,75 valores)`

$$P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6) = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{19}{4^6} =$$

$$= \frac{19}{4096} \simeq 0,00463867 \simeq 0,005$$

2.d) Qual a probabilidade do João ter acertado pelo menos uma vez no alvo? `(1 valor)`
Sendo que $P(X = 0) = q^6 = (1 - p)^6 = (3/4)^6$ é a probabilidade do João falhar as 6 vezes, temos:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{729}{4096} = \frac{3367}{4096} \simeq 0,8202148 \simeq 0,82$$

Cotação:
* Definição da probabilidade pretendida - 25% (0,25 valores)
* Formulação da probabilidade - 30% (0,3 valores)
* Identificação correta das probabilidades do enunciado (p e q) - 25% (0,25 valores)
* Resultado final correto, desde que justificado - 20% (0,2 valores)

3. As massas de 800 hamburgers do restaurante "Best Burger"seguem uma distribuição normal com $\mu = 140$ gramas e $\sigma = 10$ gramas.

3.a) Quantos hamburgers têm massa entre 138 e 148 gramas? `(2 valores)`

A v.a massa de um hamburger, W, segue uma distribuição normal, $W \sim N(\mu = 140, \sigma = 10)$

$$Z = \frac{W - \mu}{\sigma} = \frac{W - 140}{10} \sim N(0,1)$$

Pretende-se

$$P(138 \leq W \leq 148) = P\left(\frac{138-140}{10} \leq Z \leq \frac{148-140}{10}\right) = P(-0,2 \leq Z \leq 0,8)$$

Consultando a tabela da distribuição normal reduzida

$$P(-0,2 \leq Z \leq 0,8) = \Phi(0,8) - \Phi(-0,2) = \Phi(0,8) - (1 - \Phi(0,2)) =$$

$$= 0,7881 - 1 + 0,5793 = 0,3674$$

Portanto $N = 800(0,3674) = 293,92 \approx 293$ (considerando que a massa tem de estar entre 138 e 148 gramas e o número de hamburgers é um número inteiro).

Cotação:

* Definição da v.a. W e sua distribuição - 15% (0,3 valores)
* Definição da v.a. fulcral Z e sua distribuição - 15% (0,3 valores)
* Formulação da probabilidade pretendida e passagem de W para Z - 30% (0,6 valores)
* Identificação correta das probabilidades utilizando a tabela disponível da distribuição normal reduzida - 15% (0,3 valores)
* Cálculo da probabilidade final - 10% (0,2 valores)
* Resultado final correto do número de hamburgers, N, desde que justificado - 15% (0,3 valores)

3.b) Quantos hamburgers possuem massa superior a 152 gramas? `(1,5 valores)`

Pretende-se

$$P(W \geq 152) = P\left(Z \geq \frac{152-140}{10}\right) = P(Z \geq 1,2)$$

$$= 1 - P(Z < 1,2) = 1 - \Phi(1,2) = 1 - 0,8849 = 0,1151$$

Portanto $N = 800(0,1151) = 92,08 \approx 93$ (considerando que a massa tem de ser superior a 152 e o número de hamburgers é um número inteiro).

Cotação:

* Formulação da probabilidade pretendida e passagem de W para Z - 40% (0,6 valores)
* Identificação correta das probabilidades utilizando a tabela disponível da distribuição normal reduzida - 20% (0,3 valores)
* Cálculo da probabilidade final - 20% (0,3 valores)
* Resultado final correto do número de hamburgers, N, desde que justificado - 20% (0,3 valores)

4. Seja X uma v.a. contínua com função de densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & x < 0 \vee x > 3 \end{cases}$$

4.a) Determine k. `(2 valores)`

Para $f(x)$ ser uma função de densidade de probabilidade temos que:

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{3} \left(\frac{1}{6}x + k\right) dx = \left.\frac{x^2}{12} + kx\right|_{0}^{3} = \frac{9}{12} + 3k = \frac{3}{4} + 3k$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} + 3k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{12}$$

verificando também $f(x) \geq 0$, dado que

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12} \geq 0 \quad \forall \ 0 \leq x \leq 3$$

Cotação:

* Identificação das propriedades de uma f.d.p - 30% (0,6 valores)
* Resolução do integral e determinação do valor de k - 50% (1 valor)
* Verificação que para o valor de k encontrado a f.d.p é ≥ 0 em todo o seu domínio - 20% (0,4 valores)

4.b) Determine $P(1 \leq X \leq 2)$. `(1,5 valores)`
Pretende-se

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}\right)\,dx = \frac{x^2}{12} + \frac{1}{12}x\Big|_1^2 = \frac{1}{12}(x^2 + x)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{6}{12} - \frac{2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Cotação:
* Identificação do integral que corresponde à probabilidade - 40% (0,6 valores)
* Resolução do integral- 40% (0,6 valores)
* Resultado final, desde que justificado - 20% (0,3 valores)

Cotações
A cotação total deste e-fólio Global é de 12 valores distribuídos do seguinte modo:

Exercício	Cotação (valores)
1.a)	0,5
1.b)	1,0
1.c)	0,5
2.a)	0,5
2.b)	0,75
2.c)	0,75
2.d)	1,0
3.a)	2,0
3.b)	1,5
4.a)	2,0
4.b)	1,5

FIM