Elementos de Análise Infinitesimal I | 21030

Proposta de Resolução Sumária

1. **Case Base:** $\mathbf{n = 0}$. Caso particular do Teorema 3, pág. 578, para $a_0 = 1$.

   Hipótese de indução: Fixado um $m \in \mathbb{N}_0$, **qualquer**, suponhamos que para esse m tem-se
   $$\sum_{k=m}^{\infty} r^k = \frac{r^m}{1-r}.$$

   Tese de indução:
   $$\sum_{k=m+1}^{\infty} r^k = \frac{r^{m+1}}{1-r}.$$

   Passo de indução: Nesta parte vamos provar a tese de indução. Tem-se
   $$\sum_{k=m}^{\infty} r^k = r^m + \sum_{k=m+1}^{\infty} r^k,$$
   o que pela hipótese de indução implica que
   $$\sum_{k=m+1}^{\infty} r^k = \sum_{k=m}^{\infty} r^k - r^m = \frac{r^m}{1-r} - r^m = \frac{r^m[1-(1-r)]}{1-r} = \frac{r^{m+1}}{1-r}.$$

   Conclusão: Pelo método de indução matemática, podemos concluir que, para qualquer $m \in \mathbb{N}_0$,
   $$\sum_{k=m}^{\infty} r^k = \frac{r^m}{1-r}.$$

2.1. Sendo $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ uma progressão geométrica, $a_k = a_0 r^k$ para algum $a_0, r \in \mathbb{R}$ (cf. introdução à Subsecção "Séries Geométricas", pág. 577). Acresce que, por hipótese, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ é convergente para 0, o que acontece se, e só se, $-1 < r < 1$.

Logo e para todo o $k \in \mathbb{N}_0$, $a_k^\alpha = a_0^\alpha (r^\alpha)^k$, que é uma progressão geométrica de razão r^α. Como $\alpha \geq 1$ e $|r| < 1$ tem-se ainda

$$|r^\alpha| \leq |r| < 1$$

pelo que a série geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^\alpha$$

é convergente (cf. condição necessária e suficiente enunciada no Teorema 3, pág. 578).

2.2. Pelo Exercício 1 (ou pelo Teorema 3, pág. 578),

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^\alpha = \frac{a_0^\alpha}{1 - r^\alpha}.$$

3.1. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{5a_n + 3}{6},$$

em que

$$a_n \geq -\frac{3}{5} \implies \frac{5a_n + 3}{6} \geq 0,$$

pelo que $a_{n+1} \leq a_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

3.2. Atendendo a que $a_n \geq -\frac{3}{5}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e que, pela alínea anterior, a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, conclui-se que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada:

$$-\frac{3}{5} \leq a_n \leq a_1 = -\frac{2}{5}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sendo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente e limitada, esta sucessão é então convergente, cf. Teorema 2, pág. 652. Assim sendo e pelo Teorema 2, pág. 648, qualquer subsucessão de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é convergente e para o mesmo valor. Em particular e para a subsucessão $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ dos termos de ordem par,

$$\lim_n a_{2n} = \lim_n a_n. \tag{1}$$

Relativamente a esta subsucessão, note que também ela é decrescente,

$$a_{2(n+1)} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n} \implies a_{2(n+1)} \leq a_{2n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde,

$$\sup\{a_{2n} : n \in \mathbb{N}\} = \max\{a_{2n} : n \in \mathbb{N}\} = a_2 = -\frac{17}{30}$$

e, pelo Teorema 2, pág. 652,

$$\lim_n a_{2n} = \inf\{a_{2n} : n \in \mathbb{N}\}. \tag{2}$$

Designando por $a = \lim_n a_n$, tal como no Exercício 3.3 da Atividade Formativa 1 conclui-se que

$$a = \lim_n a_{n+1} = \frac{\lim_n a_n - 3}{6} = \frac{a-3}{6} \iff a = -\frac{3}{5},$$

pelo que, por (1) e por (2),

$$\inf\{a_{2n} : n \in \mathbb{N}\} = \lim_n a_{2n} = \lim_n a_n = -\frac{3}{5}.$$