Elementos de Análise Infinitesimal 2 | 21031

Período de Realização

Decorre de 26 de março a 1 de abril de 2019

Data de Limite de Entrega

1 de abril de 2019, até às 23h55 de Portugal Continental

Temas

Tópico 1 da UC.

Objetivos

Testar o domínio, por parte do estudante, dos conteúdos correspondentes ao tópico indicado supra.

Critérios de avaliação e cotação

Para a avaliação das respostas constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

1. 1,0 valor
2. 1,0 valor

Total: 2,0 valores

Normas a respeitar

Todas as páginas do seu documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 10 páginas A4

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo e-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Fernando Pestana da Costa

Trabalho a desenvolver

1. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$.

a) Dada a decomposição $\mathcal{P}_n$ de $[0, 1]$ constituída por $n + 1$ pontos equidistantes, calcule a soma superior $S_{\mathcal{P}_n}(f)$ e a soma inferior $s_{\mathcal{P}_n}(f)$.

b) Mostre que $\displaystyle\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$.
[Sugestão: Relembre que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + m^3 = \left(\frac{1}{2}m(m+1)\right)^2$*.]*

2. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Determine, explicando cuidadosamente o seu raciocínio, a série de MacLaurin de g e investigue qual é a região de convergência da série que determinou.

FIM

RESOLUÇÃO

1.a) Considerando a decomposição $\mathcal{P}_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1 - \frac{1}{n}, 1\right\}$ a soma superior de Darboux da função $f(x) = x^3$ no intervalo $[0, 1]$ é[1]

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{P}_n}(f) &= \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{3}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n} \times 1^3 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3} \;=\; \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3 \;=\; \frac{1}{n^4}\Big(\frac{1}{2}n(n+1)\Big)^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^2, \end{aligned}$$

e a soma inferior de Darboux é

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{P}_n}(f) &= \frac{1}{n} \times 0^3 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 \\ &= \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n-1}k^3 \;=\; \frac{1}{n^4}\Big(\frac{1}{2}n(n-1)\Big)^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^2, \end{aligned}$$

1.b) Notando que

$$\lim S_{\mathcal{P}_n}(f) = \inf S_{\mathcal{P}_n}(f) = \frac{1}{4} = \sup s_{\mathcal{P}_n}(f) = \lim s_{\mathcal{P}_n}(f),$$

e sabendo que

$$\overline{\int_0^1} f = \inf S_{\mathcal{P}}(f) \leq \inf S_{\mathcal{P}_n}(f)$$

e

$$\underline{\int_0^1} f = \sup s_{\mathcal{P}}(f) \geq \sup S_{\mathcal{P}_n}(f)$$

concluimos que

$$\underline{\int_0^1} f \geq \frac{1}{4} \geq \overline{\int_0^1} f.$$

Mas como se tem sempre $\underline{\int_0^1} f \leq \overline{\int_0^1} f$ concluimos que é válida a igualdade

$$\underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f$$

[1] Poderá ser útil, para ganhar intuição, fazer um esboço gráfico da situação para um valor concreto de n, digamos: $n = 5$ ou $n = 6$.

e, consequentemente, f é integrável à Riemann em $[0,1]$ e ainda que o valor do integral é $\frac{1}{4}$.

2. A função $t \mapsto e^{-t^2}$ é contínua (e até é diferenciável) em $\mathbb{R}$ e, portanto, a função g é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $g'(x) = e^{-x^2}$. Pelo teorema da diferenciabilidade das funções compostas g' é diferenciável e $g''(x) = -2xe^{-x^2}$. Naturalmente, por indução, g é infinitamente diferenciável pois é o produto de um polinómio com a função diferenciável $x \mapsto e^{-x^2}$. Como a função exponencial $u \mapsto e^{-u}$ tem série de Mac-Laurin $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-u)^k}{k!}$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^k}{k!} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k} dt \\ &\quad \text{(como a série de potencias é uniformemente convergente} \\ &\quad \text{em intervalos limitados e fechados)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (1) \end{aligned}$$

A região de convergência de (1) pode ser investigada de diversas maneiras. Por exemplo, pelo critério da raíz sabemos que, como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \left(x^2\right)^k,$$

a série é convergente se

$$\limsup \sqrt[k]{\left| \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \left(x^2\right)^k \right|} < 1.$$

Como[2]

$$\begin{aligned} 1 &> \limsup \sqrt[k]{\left| \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \left(x^2\right)^k \right|} = x^2 \limsup \sqrt[k]{\frac{1}{k!(2k+1)}} \\ &= \frac{x^2}{\lim \sqrt[k]{2k+1}\sqrt[k]{k!}} = 0 \end{aligned}$$

[2] Poderá ser útil relembrar que, para sucessões positivas, se $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to L \in [0, +\infty]$, então também $\sqrt[k]{a_k} \to L$.

Como esta desigualdade $(1 > 0)$ é válida para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$, conclui-se que a série de Mac-Laurin (1) tem $\mathbb{R}$ como região de convergência.