21165 - Geometria

Actividade formativa II

Problema 1. *Define-se o modelo Pombalino (ou modelo da "taxicab geometry") tomando para pontos e rectas exactamente os mesmos que no plano cartesiano real, mas para distância entre dois pontos $P = (x, y)$ e $Q = (a, b)$ a função*

$$d_P(P, Q) = |x - a| + |y - b|.$$

Encontre um sistema de coordenadas para uma recta genérica no plano Pombalino.

Solução: O motivo do nome taxycab geometry ou modelo Pombalino é evidente: a distância entre pontos é aquela que seria medida por um taxi que se tivesse que deslocar numa cidade do tipo Pombalino (com avenidas e ruas mutuamente perpendiculares). Procuremos então um sistema de coordenadas para uma recta dada. Se a recta é vertical, ou seja, do tipo $x = a$ com $a \in \mathbb{R}$, basta tomar

$$f(a, y) = y$$

e verifica-se que, para $P = (a, y_1), Q = (a, y_2)$,

$$|f(a, y_1) - f(a, y_2)| = |y_1 - y_2| = d_P(P, Q).$$

Se a recta é horizontal, temos o resultado análogo, substituindo y por x. Consideremos então uma recta genérica l da forma

$$y = mx + b, m \neq 0$$

Sendo $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2)$ dois pontos distintos sobre l, temos $y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$. Então

$$d_P(P, Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |x_1 - x_2| + |m(x_1 - x_2)| = (1 + |m|)|x_1 - x_2|$$

Isto sugere que tomemos para sitema de coordenadas a função

$$f(x, y) = x(1 + |m|)$$

e de facto verificamos que

$$|fP - fQ| = |x_1(1 + |m|) - x_2(1 + |m|)| = (1 + |m|)|x_1 - x_2| = d_P(P, Q)$$

pelo que f é um sistema de coordenadas para l.

Problema 2. *Prove que para quaisquer vectores* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}$, $||\vec{x}+\vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$. *Em que condições se tem a igualdade? Deduza também que* $|||\vec{x}|| - ||\vec{y}||| \leq ||\vec{x}-\vec{y}||$. *Sugestão: desenvolva* $||\vec{x}+\vec{y}||^2$ *e use a desigualdade de Cauchy-Schwarz.*

Solução:

$$\begin{aligned} ||\vec{x}+\vec{y}||^2 &= (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{x} + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{y} \\ &= ||\vec{x}||^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + ||\vec{y}||^2 \leq ||\vec{x}||^2 + 2|\vec{x}\cdot\vec{y}| + ||\vec{y}||^2 \\ &\leq ||\vec{x}||^2 + 2||\vec{x}||||\vec{y}|| + ||\vec{y}||^2 \text{ (por Cauchy-Schwarz)} \\ &= (||\vec{x}|| + ||\vec{y}||)^2 \end{aligned}$$

e como todos os valores são reais positivos,

$$||\vec{x}+\vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$$

Para determinar as condições em que há igualdade notamos que

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| = ||\vec{x}||||\vec{y}|||cos(\theta)|$$

pelo que a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq ||\vec{x}||||\vec{y}||$$

é uma igualdade apenas quando $|cos(\theta)| = 1$, ou seja, quando os vectores são linearmente dependentes.

Por outro lado a desigualdade,

$$\vec{x}\cdot\vec{y} \leq |\vec{x}\cdot\vec{y}|$$

é uma igualdade apenas quando $cos(\theta) > 0$. Então resta apenas o caso $\theta = 0$, ou seja, a igualdade

$$||\vec{x}+\vec{y}|| = ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$$

acontece sse os vectores são proporcionais com coeficiente de proporcionalidade positivo. Dito de outra forma, se têm a mesma direcção e sentido.

Para provar que $|||\vec{x}|| - ||\vec{y}||| \leq ||\vec{x}-\vec{y}||$, usamos a mesma estratégia, invertendo as desigualdades:

$$\begin{aligned} ||\vec{x}-\vec{y}||^2 &= (\vec{x}-\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{x} - 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{y} \\ &= ||\vec{x}||^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{y} + ||\vec{y}||^2 \geq ||\vec{x}||^2 - 2|\vec{x}\cdot\vec{y}| + ||\vec{y}||^2 \\ &\geq ||\vec{x}||^2 - 2||\vec{x}||||\vec{y}|| + ||\vec{y}||^2 \text{ (por Cauchy-Schwarz)} \\ &= (||\vec{x}|| - ||\vec{y}||)^2 \end{aligned}$$

e como todos os valores são reais positivos, isto equivale a

$$\sqrt{||\vec{x}-\vec{y}||^2} \geq \sqrt{(||\vec{x}||-||\vec{y}||)^2}$$

ou seja

$$|||\vec{x}-\vec{y}||| \geq |||\vec{x}||-||\vec{y}|||$$

ou, finalmente

$$|||\vec{x}||-||\vec{y}||| \leq ||\vec{x}-\vec{y}||$$

Um aparte: fiz este passo com os módulos especialmente devagar para vos lembrar de um detalhe que pode ser útil (noto que muitos alunos no vosso ano ainda fazem muitas confusões com os módulos). Uma relação interessante entre os módulos e as raízes quadradas é a seguinte:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Notem que isto é verdade para qualquer x real, e dá-nos uma forma fechada para lidarmos com módulos, que por vezes é muito prática. Por exemplo, permite-nos escrever a derivada da função módulo sem partir em ramos. Pela regra da derivada da função composta:

$$|x|' = \sqrt{x^2}' = ((x^2)^{1/2})' = (1/2)2x(x^{-1/2}) = \frac{x}{|x|}$$

sendo que esta última função é por sua vez uma expressão fechada para a função *sinal* , $sgn(x)$, que é igual a 1 quando x é positivo e -1 quando x é negativo.

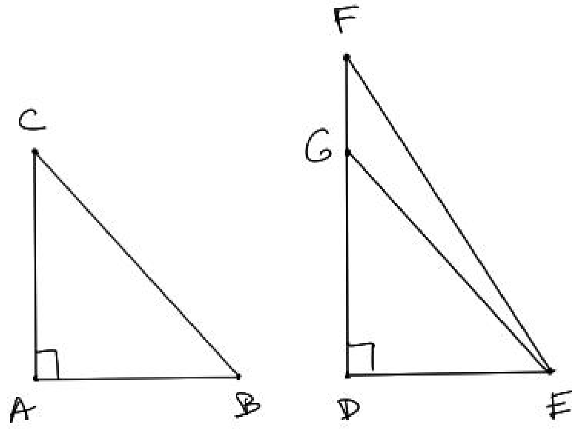
Problema 3. *Demonstre o critério HC (Hipotenusa-Cateto) de congruência de triângulos rectângulos: Se dois triângulos tiverem as hipotenusas e um dos catetos congruentes, então são congruentes.*

Solução:

Consideremos os dois triângulos rectângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, como na figura, em que $\angle A$ e $\angle D$ são ângulos rectos. Suponhamos que $|AB| = |DE|$ e $|BC| = |EF|$, mas que os triângulos não são congruentes. Então $|CA| \neq |FD|$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $|CA| < |FD|$. Então existe um ponto G tal que $F - G - D$ e $|CA| = |GD|$. Por LAL, $\triangle ABC = \triangle DEG$. Mas então $|EF| = |GF|$, pelo que $\triangle EFG$ é isósceles. Mas então (ver teorema 4.6 do manual) se M for o ponto médio de $\overline{FG}$, $\overleftrightarrow{ME}$ é uma perpendicular a $\overleftrightarrow{FD}$ que passa por E. Mas $\overleftrightarrow{DE}$ também é uma perpendicular a $\overleftrightarrow{FD}$ que passa por E, o que contradiz a unicidade garantida pelo caso geral do teorema de existência de perpendiculares (teorema 4.7 do manual).

Em alternativa, podíamos ter notado o seguinte: Pelo teorema do ângulo externo (teo. 4.5 do manual) todo o ângulo externo é maior que qualquer interno remoto. Considerando o triângulo $\triangle DEG$, vemos que $m(\angle FGE) >$

90. Mas o $\triangle EFG$ é isósceles, pelo que os ângulos da base são congruentes. Então $m(\angle EFG) = m(\angle FGE)$, portanto $m(\angle EFG) + m(\angle FGE) > 180$, o que é impossível pelo lema da soma de dois ângulos de um triângulo (teo. 4.10 do manual).

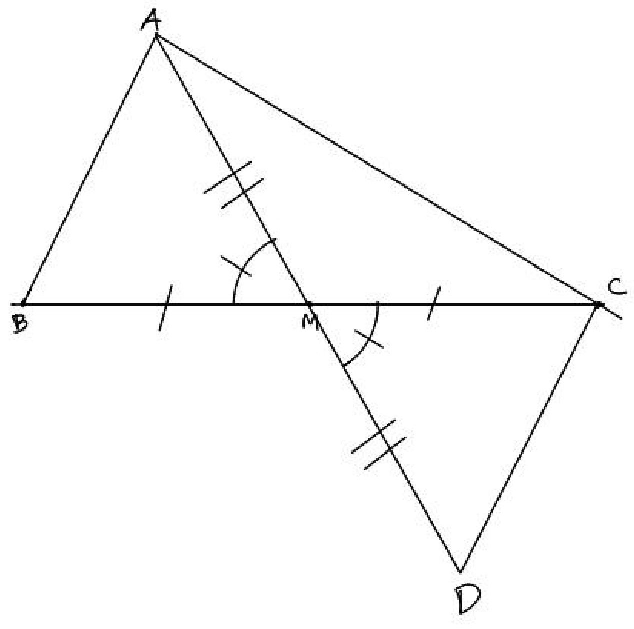


Problema 4. *Seja M o ponto médio do lado $\overline{BC}$ do $\triangle ABC$. Mostre que*

$$|AM| < \frac{1}{2}(|AB| + |AC|).$$

(Sugestão: prolongue $\overline{AM}$ até D tal que $|AM| = |MD|$)

Solução: Seja D um ponto tal que $A - M - D$, $|AM| = |MD|$ (ver figura). Por construção, $|BM| = |MC|$ e $|AM| = |MD|$. Além disso $\angle AMB \equiv \angle CMD$ pois são ângulos verticalmente opostos. Então, aplica-se LAL e $\triangle MBA \equiv \triangle MCD$. Em particular, $|BA| = |CD|$.



Pelo teorema da desigualdade triangular restrita (ver teorema 5.2 do manual) temos

$$|AD| < |AC| + |CD|$$

Mas $|AD| = 2AM$, e $|CD| = |AB|$, portanto

$$2AM < |AC| + |AB|$$

ou seja

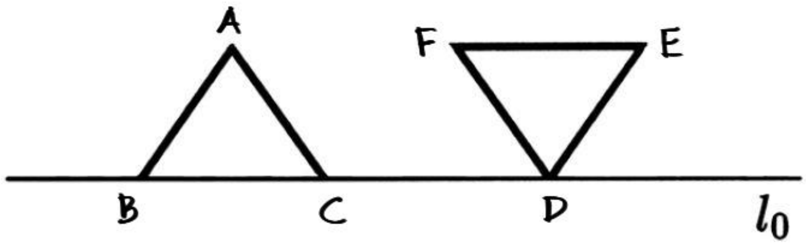
$$|AM| < \frac{1}{2}(|AB| + |AC|).$$

Problema 5. *a) Prove a independência de LAL face aos axiomas $A_1 - A_8$ utilizando um modelo (E', L', d', m') que coincide com o plano cartesiano real (E, L, d_E, m) excepto pela existência de uma recta especial l_0 sobre a qual de verifica $d'(P, Q) = 2d_E(P, Q)$ sempre que $P, Q \in l$.*

b) Diga se no plano referido na alínea anterior é verificada a desigualdade triangular.

Solução: Antes de mais, é evidente que este plano (E', L', d', m') verifica $A_1 - A_8$, pois trata-se do plano cartesiano real com a diferença da inclusão de uma recta "mágica"onde as distâncias valem o dobro. A única verificação a fazer com mais cuidado diz respeito à existência de um sistema de coordenadas sobre a recta l_0, mas esse sistema é de construção evidente: basta tomar um sistema de coordenadas cartesianas e multiplicar as distâncias por dois. Os detalhes ficam a cargo do estudante.

Consideramos um triângulo que no plano cartesiano real é equilátero de lado a. Colocamos duas cópias do triângulo sobre a recta mágica l_0, da forma indicada na figura. No primeiro caso há um dos lados que incide sobre l_0 e no segundo caso apenas um dos vértices está incidente.



Os triângulos estão nas condições de LAL. De facto, basta considerar a correspondência $A \mapsto E$, $B \mapsto E$, $C \mapsto F$. Temos $|AB| = |DE|$ e $|AC| = |DF|$, pois nenhum dos lados em causa está sobre l_0. Os ângulos são medidos como no plano cartesiano real, pelo que permanecem congruentes, portanto $\angle A \equiv \angle D$.

No entanto, apesar de se verificarem as condições de LAL, os triângulos não são congruentes no plano da recta mágica. De facto, porque o lado $\overline{BC}$ está sobre l_0, então $|BC| = 2|FE|$.

Sendo assim, o axioma LAL não se verifica neste plano. Como se verificam $A_1 - A_8$, podemos concluir que LAL é independente destes axiomas.

b) Não se verifica a desigualdade triangular. Se considerarmos dois pontos A, C sobre l_0, podemos escolher o ponto B fora de l_0 de forma a ter $d'(A, B) + d'(B, C) = d_E(A, C) + \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ tão pequeno quanto se queira, e, para ε suficientemente pequeno vem $d'(A, C) = 2d_E(A, C) > d_E(A, C) + \varepsilon = d'(A, B) + d'(B, C)$, em contradição com a desigualdade triangular.

Problema 6. *Determine a forma de uma circunferência de centro* $C = (a, b)$ *e raio* $r > 0$ *no plano Pombalino.*

Solução:

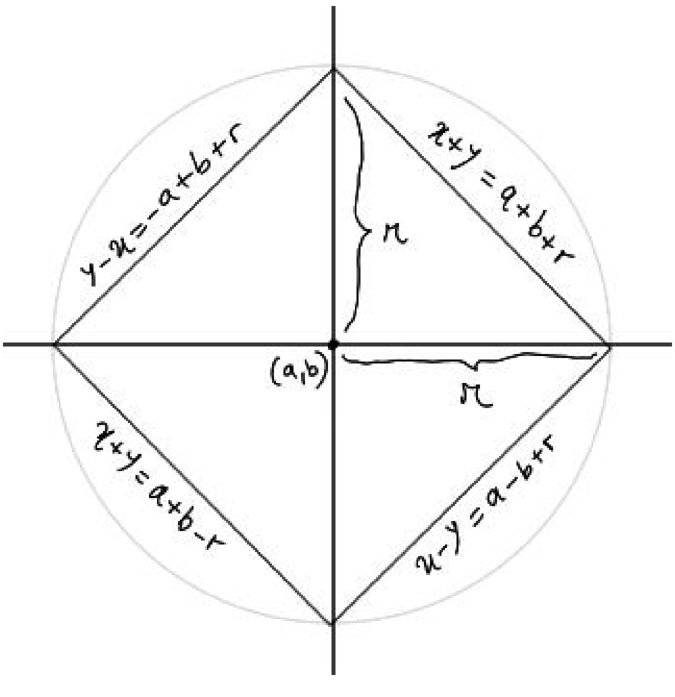
Uma circunferência de centro C e raio r é o conjuntos dos pontos P tais que $d(C, P) = r$, onde d é a distância definida no plano em causa. Neste caso é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$d_P(C, P) = |x - a| + |y - b| = r$$

Esta condição parte-se naturalmente em quatro sectores distintos:

$$\begin{aligned} x + y &= a + b + r \text{ se } x \geq a, y \geq b \\ x - y &= a - b + r \text{ se } x \geq a, y < b \\ -x + y &= -a + b + r \text{ se } x < a, y \geq b \\ x + y &= a + b - r \text{ se } x < a, y < b \end{aligned}$$

Em cada sector a equação representa um segmento de recta com declive de módulo igual a 1. Todos os segmentos têm o mesmo comprimento, e encontram-se em quatro vértices (verificação a cargo do estudante). Trata-se de facto do quadrado euclideano representado abaixo:



A figura é um quadrado (no sentido usual do termo) de diagonal igual a $\sqrt{2}r$, rodado de 45 graus em torno do centro.

Problema 7. *Mostre que se uma linha intersecta um plano mas não está contida nesse plano então intersecta-o apenas num ponto.*

Solução: Suponhamos que a linha l intersectava o plano em pelo menos dois pontos A e B. Por A_{12}, a linha que passa por A e B está contida no plano. Mas dois pontos determinam uma única linha, portanto essa linha é l, e assim sendo l está contida no plano.

Problema 8. *Para toda a linha l e todo o ponto $P \notin l$ existe um único plano passando por P e contendo l.*

Solução: Sobre a linha l existem pelo menos dois pontos A e B. A, B, P são não-colineares, pelo enunciado (senão P pertenceria a l). Pelo axioma A_{11}, existe um único plano que passa por A, B, C. Pelo axioma A_{12}, a linha l está contida nesse plano, porque ele contém os dois pontos A e B.

Problema 9. *Se duas linhas r, s se cortam num (único) ponto, então existe um único plano que as contém.*

Solução: Seja P o ponto de intersecção. Cada linha tem pelo menos mais um ponto. Seja $A \in r$ e $B \in s$. Por A_{11} existe um único plano que contém A, B, P. Por A_{12} aplicado aos pares de pontos A, P e B, P esse plano contém respectivamente as rectas r e s. Além disso é o único que as contém porque um plano que não contenha A, B, P não contém as rectas r e s.

Problema 10. *Existem, pelo menos, dois planos, e todo o plano contém, pelo menos, duas linhas.*

Solução: Por A_{15}, existem pelo menos quatro pontos não-complanares. Sejam A, B, C, D quatro pontos nessas condições.

Comecemos por mostrar que nenhum triplo destes pontos é co-linear. Primeiro, se todos os quatro fossem colineares, então, como existem três pontos não-colineares, teria que existir um ponto P não colnear com A, B, C, D. Então por A_{11} passa um único plano por A, B, P, e por A_{12} a linha que contém A, B está nesse plano, mas como essa linha também contém C, D, então A, B, C, D são complanares. Então pelo menos um dos pontos tem que ser não-colinear com os outros três. Mas suponhamos que A, B, C eram colineares. Então por A_{11} passa um único plano por A, B, D. Mas de novo por A_{12} esse plano contém a recta $\overleftrightarrow{AB}$, que contém C, portanto A, B, C, D são complanares.

Estabelecemos portanto que nenhum triplo de pontos é colinear.

Por A_{11} existe um único plano α que passa por A, B, C, e um único plano β que passa por B, C, D. Estes planos são distintos, porque se não fossem, os quatro pontos seriam complanares. Portanto existem pelo menos dois planos. Além disso o plano α contém as linhas (distintas, porque nenhums três pontos são colineares) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e o plano β contém as linhas $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{CD}$.

Problema 11. *Mostre que se $|AM| = |BM| = (1/2)|AB|$ então $M = A = B$ ou M é o ponto médio de $\overline{AB}$.*

Solução: Como $|AM| = |BM| = (1/2)|AB|$, então $|AM| + |MB| = 2(1/2)|AB| = |AB|$. Mas então, ou $A = M = B$, ou $M \in \overline{AB}$ (senão teria que valer a desigualdade estrita $|AM| + |MB| > |AB|$) e portanto M é o ponto médio.

Problema 12. *Mostre que se uma isometria permuta dois pontos A e B então preserva o ponto médio de $\overline{AB}$.*

Solução: Seja φ a isometria em causa. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$. Sejam A', B', M' as imagens por φ de A, B, M respectivamente. Sabemos que $A' = B$ e $B' = A$. Vamos mostrar que $M' = M$.

Temos que $|AM'| = |B'M'|$ porque $B' = A$, e que $|B'M'| = |BM|$ porque φ preserva distâncias. Mas $|BM| = (1/2)|AB|$ porque M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Portanto

$$|AM'| = (1/2)|AB|$$

.

Da mesma forma

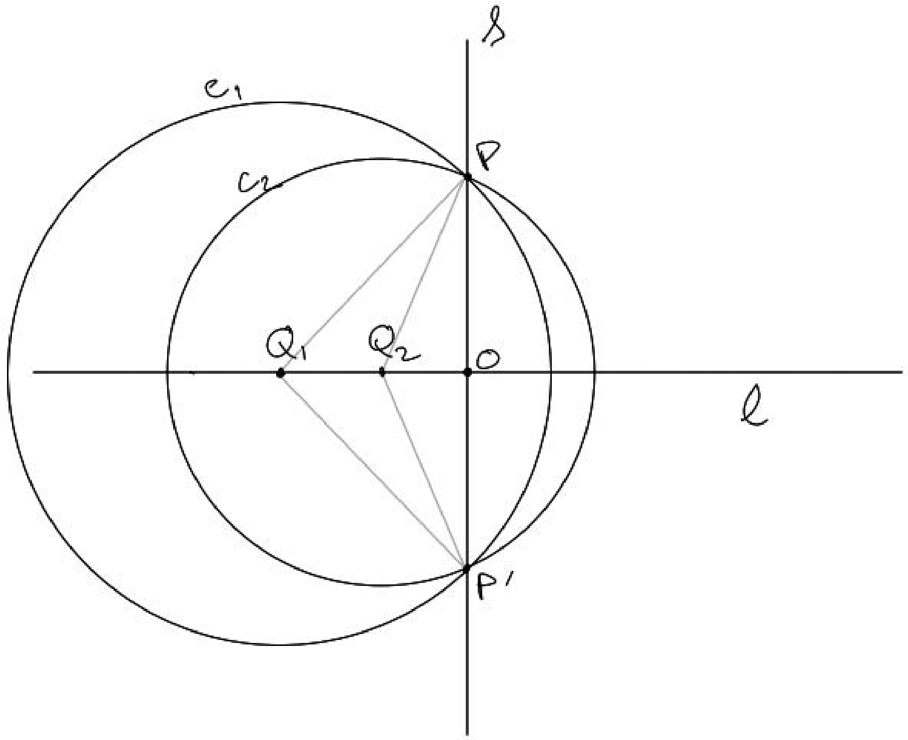
$$|BM'| = |A'M'| = |AM| = (1/2)|AB|$$

Então $|AM'| + |M'B| = |AB|$, e M' e, pela proposição demonstrada acima, M' é o ponto médio de $\overline{AB}$. Como o ponto médio é único, então $M' = M$, pelo que M é invariante por φ.

Problema 13. *Dada uma linha l e um ponto P faça a construção por régua e compasso da reflexão de P por l.*

Solução: Seja P' a imagem de P pela reflexão. Construímos P' da seguinte forma:

Tomamos dois pontos Q_1 e Q_2 sobre l. Abrimos o compasso de Q_1 a P e traçamos a circunferência c_1, de raio $|Q_1P|$ e centro Q_1. Abrimos o compasso de Q_2 a P e traçamos a circunferência c_2, de raio $|Q_2P|$ e centro Q_2. Afirmamos que as circunferências intersectam-se no ponto P' (e, trivialmente, em P).



De facto, seja s a única perpendicular a l que passa por P. Seja O o ponto de intersecção de s com l. P' é o único ponto tal que O é o ponto médio de $\overline{PP'}$. Por LAL, $\triangle POQ_i \equiv \triangle P'OQ_i$, $i = 1, 2$, e portanto $|Q_iP'| = |Q_iP|$, $i = 1, 2$. Então as circunferências c_1 e c_2 passam ambas por P'.

Falta saber se P e P' são as únicas intersecções de c_1 e c_2. Suponhamos que há um ponto R que pertence a ambas as circunferências. Considere-se $\triangle Q_1RQ_2$. Temos que $\triangle Q_1RQ_2 \equiv \triangle Q_1PQ_2$, já que $|Q_iR| = |Q_iP|$ porque $R \in c_i$, $i = 1, 2$, e o lado $\overline{Q_1Q_2}$ é comum a ambos os triângulos, pelo que podemos aplicar o critério LLL. Então, em particular, $\angle RQ_1Q_2 \equiv \angle PQ_1Q_2$. Mas pelo teorema de construção de ângulos e segmentos, de cada um dos lados de $\overline{Q_1Q_2}$ existe um único ponto R tal que $|Q_1R| = |Q_1P|$ e $\angle RQ_1Q_2 \equiv \angle PQ_1Q_2$. Do lado em que está P, P é esse ponto, e do outro lado, já sabemos que está P'. Então $R = P$ ou $R = P'$.

Nota: na execução prática da construção o geometra escolheria pontos Q_1 e Q_2 de lados opostos de s. Na figura acima a construção utiliza pontos do mesmo lado, para mostrar que isso, sendo recomendável do ponto de vista prático, não é no entanto necessário.