e-Fólio B

Nome: ....

B.I./C.C.: .... **Nº de Estudante:** ....

Unidade Curricular: Álgebra Linear I **Código:** 21002

Data: .... **Ano Letivo:** 2016/2017

Docente: Rafael Sasportes **Classificação:** ....

Para a resolução do **e-Fólio B**, aconselha-se que:

- Preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-Fólio é composto por 5 grupos de questões, num total de 3 páginas e termina com a palavra FIM. As *suas respostas* às questões deste e-Fólio não podem ultrapassar **nove** páginas A4; páginas adicionais não serão classificadas.
- Escreva sempre com letra legível ou usando um processador de texto matemático conveniente.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um único documento digital (em formato **pdf**), incluindo obrigatoriamente esta folha de rosto e a página com as questões de escolha múltipla, e insira-o, na página moodle da unidade curricular, em "e-Fólio B" até ao dia **16 de janeiro**.

Critérios de avaliação e cotação:

- A cotação total deste e-Fólio é de **4 valores**.
- Exceto nas questões de escolha múltipla, justifique *cuidadosa e detalhadamente* todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.
- Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0,25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0,25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores.

  Os restantes grupos têm a seguinte cotação:

Grupo II	Grupo III	Grupo IV
1 valores	1,5 valores	0,5 valores

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

1. Sejam u, v e w os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$, $u = (1, 0, 3), v = (1, -3, 2)$ e $w = (0, 3, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então w pertence ao subespaço gerado por u e v se:

☐ **a)** $\alpha = 0$.
☐ **b)** $\alpha = 1$.
☐ **c)** $\alpha = 2$.
☐ **d)** $\alpha = 3$.

2. Sejam F e G subespaços de $\mathbb{R}^4$ tais que $\dim F < \dim G$. Então:

☐ **a)** Se $\dim F = 3$ então $F \cap G = F$.
☐ **b)** $\dim F \cap G = 4$.
☐ **c)** $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.
☐ **d)** Se $\dim F = 2$ então $F = G$.

3. Seja $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3[x]$ a aplicação definida por $g(a, b, c) = ax^3 + bx^2 + bx$. Então uma base para o núcleo de g pode ser:

☐ **a)** $x = 0$.
☐ **b)** $(0, 0, 0)$.
☐ **c)** $(1, 0, 0)$.
☐ **d)** $(0, 0, 1)$.

4. Considere as aplicações definidas por:

1. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (xy, z)$;
2. $\mathcal{S}\colon \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \mathcal{S}(A) = A + A^\top$;
3. $p\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2, p(ax^2 + bx + c) = (a, b)$;
4. $\mathcal{T}\colon \mathcal{M}^{\text{inv}}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}^{\text{inv}}_{n\times n}(\mathbb{R}), \mathcal{T}(A) = A^{-1}$, onde $\mathcal{M}^{\text{inv}}_{n\times n}(\mathbb{R})$ designa o conjunto das matrizes $n \times n$ invertíveis com entradas reais.

Então:

☐ **a)** Só $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ são aplicações lineares.
☐ **b)** Só f e $\mathcal{T}$ são aplicações lineares.
☐ **c)** Só f e p são aplicações lineares.
☐ **d)** Só $\mathcal{S}$ e p são aplicações lineares.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Sejam F e G subespaços de dimensão 3 de $\mathbb{R}^5$. Então existe um vetor $w \in \mathbb{R}^5 \backslash \{0\}$ tal que w pertence a F e a G.

b) A aplicação T definida em $\mathbb{R}[x]$ por $Tp(x) = x^2 p(x)$ é uma transformação linear.

III. Considere o endomorfismo f de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que a cada matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ faz corresponder a matriz $A + A^\top$.

i) Determine a matriz C que representa f em relação à base canónica no espaço de partida e no espaço de chegada.

ii) Determine uma base para o espaço das colunas de C.

iii) Determine uma base para o espaço das linhas de C.

iv) Determine uma base para o espaço imagem de C.

v) Determine uma base para o núcleo de C.

vi) Calcule os valores próprios de C.

vii) Determine a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica de cada valor próprio, e obtenha uma base para o espaço próprio de f associado a cada valor próprio.

viii) Diga, justificadamente, se a matriz A é semelhante a uma matriz diagonal, e em caso afirmativo

a) determine a matriz que diagonaliza A,

b) calcule explicitamente a matriz diagonal semelhante a A.

IV. Sejam u e v vetores próprios de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ associados a valores próprios distintos. Justifique que, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\alpha u + \beta v$ não é vetor próprio de A.

FIM