U.C. 21031
Elementos de Análise Infinitesimal II

18 de setembro de 2019

- INSTRUÇÕES -

- A prova é composta por **7** grupos de questões e respectivas alíneas, contém 1 página(s) e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Todas as questões deverão ser respondidas no Caderno de Prova. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- Tenha em atenção que a prova tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

Cotação e critérios de correção:

- A distribuição da cotação total (20 valores) pelos sete grupos de questões é a seguinte: Grupo I: 3,0 val.; Grupo II: 2,0 val.; Grupo III: 1,0 val.; Grupo IV: 4,0 val.; Grupo V: 4,0 val.; Grupo VI: 3,0 val.; Grupo VII: 3,0 val.
- Serão fatores a ter em conta para a avaliação da prova, a correção matemática das respostas, a **apresentação de todos os cálculos** necessários para a compreensão do raciocínio, bem como a **justificação cuidada** das respostas e a **redação clara e organizada** das mesmas. Respostas apresentadas sem qualquer justificação, mesmo que corretas, serão classificadas com zero valores.

I. Considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \\ x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

a) Sendo $\mathcal{P}_n$ uma decomposição equidistante de $[0,1]$ com n pontos, determine as somas de Darboux $s_{\mathcal{P}_n}(f)$ e $S_{\mathcal{P}_n}(f)$.
(Sugestão: relembre que $1+2+3+\ldots+m = \frac{1}{2}(m+1)m$*.)*

b) Com base no resultado da alínea anterior determine os valores de $\underline{\int_0^1} f$ e de $\overline{\int_0^1} f$

c) O que pode concluir sobre a integrabilidade à Riemann de f ? Justifique!

II. Utilizando resultados apropriados do integral de Riemann calcule a área da porção Ω de $[0,e] \times \mathbb{R}$ constituida pelos pontos (x,y) que satisfazem $|y| \leqslant \min\{1, |\log x|\}$.

III. Relembrando a série de Mac-Laurin da função exponencial e^x, determine a série de Taylor no ponto 1 da função $g(x) = xe^x$ e esclareça qual o seu intervalo de convergência. Justifique cuidadosamente.

IV. Considere a função h dada por $h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ e definida no maior subconjunto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ onde a expressão faça sentido.

a) Mostre que $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e determine, caso exista, ou justifique porque não existe, o limite de h em $(0,0)$.

b) É possível prolongar h a $\mathbb{R}^2$ de modo a que o prolongamento seja uma função contínua ? Se sim, determine esse prolongamento. Se não, explique porquê.

V. Considere as funções diferenciáveis $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definidas por $p(u) = (\sin u, \cos u, u^2)$ e $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Seja $r = q \circ p$.

a) Determine uma expressão explícita de r e, a partir dela, justifique que r é uma função diferenciável e calcule a sua derivada num ponto arbitrário do seu domínio.

b) *Não recorrendo à expressão explícita de r,* utilize o teorema de derivação da função composta para mostrar que r é diferenciável e para determinar a derivada referida na alínea anterior.

VI. Recorra ao método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os pontos da esfera de raio 1 centrada na origem de $\mathbb{R}^3$ que estão mais próximos, e os que estão mais afastados, do ponto (1, -1, 1). Determine as distâncias em causa. Justifique pormenorizadamente a sua resolução.

VII. Considere a função $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x,y,z) = 2x^2y^2z^2 - xyz - 1$.

a) Determine para que pontos (x_0, y_0, z_0) é que o Teorema da Função Implícita permite garantir que a equação $\Phi(x,y,z) = 0$ define implicitamente uma função $z = \phi(x,y)$ para (x,y) numa vizinhança de (x_0, y_0).

b) Use o Teorema da Função Implícita para concluir que a equação cartesiana do plano tangente à superfície de equação $\Phi(x,y,z) = 0$ em $(1,1,1)$ é $z = 1 - (x-1) - (y-1)$.

FIM

RESOLUÇÃO

I.a) Considere-se, então, a decomposição de $[0,1]$ constituida por n pontos distribuidos de modo equidistante em $[0,1]$, ou seja: $\mathcal{P}_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$. Como $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$ tem-se que, em cada um dos intervalos $I_j := \left[\frac{j}{n-1}, \frac{j+1}{n-1}\right]$, onde $j = 0, \ldots, n-2$, o supremo de f é igual a $2\frac{j+1}{n-1}$, e o infimo de f é igual a $\frac{j}{n-1}$. Consequentemente, tem-se

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{P}_n}(f) &= \sum_{j=0}^{n-2} \tfrac{1}{n-1} \sup_{I_j} f \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \tfrac{1}{n-1} 2\tfrac{j+1}{n-1} = \frac{2}{(n-1)^2} \sum_{j=0}^{n-2} (j+1) \\ &= \frac{2}{(n-1)^2} \frac{1}{2} n(n-1) = \frac{n}{n-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{P}_n}(f) &= \sum_{j=0}^{n-2} \tfrac{1}{n-1} \inf_{I_j} f \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \tfrac{1}{n-1} \tfrac{j}{n-1} = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{j=0}^{n-2} j \\ &= \frac{1}{(n-1)^2} \frac{1}{2} (n-1)(n-2) = \frac{1}{2} \frac{n-2}{n-1}. \end{aligned}$$

I.b) Passando ao limite quando $n \to \infty$ em cada uma das somas de Darboux obtidas na alínea anterior conclui-se que

$$\lim_{n\to\infty} s_{\mathcal{P}_n}(f) = \frac{1}{2} < 1 = \lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{P}_n}(f)$$

e como o integral superior é o ínfimo das somas superiores, e o integral inferior é o supremo das somas inferiores, concluímos que

$$\underline{\int_0^1} f \leq \frac{1}{2} < 1 \leq \overline{\int_0^1} f.$$

I.c) Tendo estabelecido na alínea anterior que $\underline{\int_0^1} f \neq \overline{\int_0^1} f$ conclui-se que f não é integrável (à Riemann) em $[0,1]$.

II. Atendendo ao esboço da região em causa apresentado na Figura 1, e integrando por partes a função $x \mapsto \log x$ para obter $\int \log x = x \log x - x$, temos que a sua área é dada por

$$2\Big(\int_0^{e^{-1}} 1\, dx + \int_{e^{-1}}^1 |\log x| dx + \int_1^e \log x dx\Big) = 2(2 - e^{-1}).$$

III. Relembrando que a série de Mac-Laurin da função exponencial e^x é

$$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \ldots,$$

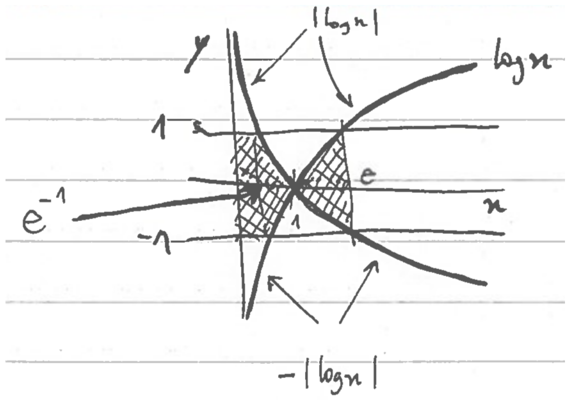

Figura 1: Região cuja área se pretende calcular

absolutamente convergente para qualque $x \in \mathbb{R}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} g(x) &= xe^x = [(x-1)+1]e^{(x-1)+1} \\ &= e(x-1)e^{x-1} + ee^{x-1} \\ &= e(x-1)\left(1+(x-1)+\tfrac{(x-1)^2}{2!}+\ldots\right) + e\left(1+(x-1)+\tfrac{(x-1)^2}{2!}+\tfrac{(x-1)^3}{3!}+\ldots\right) \\ &= e\left((x-1)+(x-1)^2+\tfrac{(x-1)^3}{2!}+\ldots+1+(x-1)+\tfrac{(x-1)^2}{2!}+\tfrac{(x-1)^3}{3!}+\ldots\right) \\ &= e\left(1+2(x-1)+\left(\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}\right)(x-1)^2+\left(\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}\right)(x-1)^3+\ldots\right) \\ &= e\left(1+\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{j!}+\frac{1}{(j+1)!}\right)(x-1)^{j+1}\right), \end{aligned}$$

e como as manipulações indicadas foram feitas sobre séries absolutamente convergente em $\mathbb{R}$, a série de potências de $x-1$ que se obtém, que a série de Taylor pedida, é também absolutamente convergente em $\mathbb{R}$.

IV.a) A expressão de h apenas não faz sentido quando $x^2y^2 + (x-y)^2 = 0$. Como a soma de dois quadrados é nula se e só se as duas parcelas forem simultaneamente nulas tem-se

$$\begin{aligned} x^2y^2+(x-y)^2=0 &\Leftrightarrow x^2y^2=0 \wedge (x-y)^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x=0 \vee y=0) \wedge x=y \\ &\Leftrightarrow (x=0 \wedge x=y) \vee (y=0 \wedge x=y) \\ &\Leftrightarrow x=0 \wedge y=0. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Observando que em pontos da reta $y = x$ distintos da origem tem-se $h(x,y) = h(x,x) = \frac{x^4}{x^4+0^2} \equiv 1$, e que em pontos do eixo dos xx distintos da origem tem-se $h(x,0) = \frac{x^2 \cdot 0^2}{x^2\cdot 0^2+(x-0)^2} \equiv 0$, concluímos imediatamente que o limite de $h(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$ não existe, pois fazendo $x \to 0$ nos dois casos obtêm-se resultados diferentes e sabemos, por um teorema geral estudado, que o limite de uma função num ponto quando existe é único.

IV.b) Não. Se fosse possível é porque existiria uma função $\widetilde{h}$ contínua na origem e igual a h fora da origem. Teria, então, de se verificar

$$\widetilde{h}(0,0) = \lim_{\substack{\mathcal{D} \ni (x,y) \to (0,0) \\ y=x}} \widetilde{h}(x,y) = \lim_{\substack{\mathcal{D} \ni (x,y) \to (0,0) \\ y=x}} h(x,y) = 1$$

e

$$\widetilde{h}(0,0) = \lim_{\substack{\mathcal{D} \ni (x,y) \to (0,0) \\ y=0}} \widetilde{h}(x,y) = \lim_{\substack{\mathcal{D} \ni (x,y) \to (0,0) \\ y=0}} h(x,y) = 0$$

o que é absurdo, pois sendo $\widetilde{h}$ uma função terá de assumir um único valor em $(0,0)$.

V.a) Pelas definições de p, q e r tem-se

$$\begin{aligned} r(u) &= q(p(u)) \\ &= q(\sin u, \cos u, u^2) \\ &= \sin^2 u + \cos^2 u + u^4 \\ &= 1 + u^4. \end{aligned}$$

Consequentemente r é uma função polinomial sendo, portanto, diferenciável e tendo-se $r'(u) = 4u^3$.

V.b) Como quer p, quer q, são funções diferenciáveis nos respetivos domínios, o teorema da derivação da função composta garante-nos que $u = q \circ p$ é também diferenciável no seu domínio e se pode escrever

$$\begin{aligned} r'(u) &= Dq(p(u))\, Dp(u) \\ &= \begin{bmatrix} 2\sin u, & 2\cos u, & 2u^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos u \\ -\sin u \\ 2u \end{bmatrix} \\ &= 2\sin u \cos u - 2\cos u \sin u + 4u^3 \\ &= 4u^3. \end{aligned}$$

VI. A função cujos extremos pretendemos estudar é a distância de um ponto (x,y,z) ao ponto $(1,-1,1)$, sendo o primeiro um ponto da esfera unitária de $\mathbb{R}^3$, isto é, o ponto (x,y,z) tem de satisfazer a restrição $x^2+y^2+z^2=1$. Estudar os extremos da função distância é o mesmo que estudar os extremos do seu quadrado (porque a função quadrado é monótona crescente).

Seja, então, $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2$ e considere-se a restrição $F=0$ onde $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$. Então, pelo método dos multiplicadores de Lagrange, os pontos de estacionaridade de f no conjunto definido por $F=0$ são dados por

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) - \lambda \nabla F(x,y,z) = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1) - 2x\lambda = 0 \\ 2(y+1) - 2y\lambda = 0 \\ 2(z-1) - 2z\lambda = 0 \\ x^2+y^2+z^2-1 = 0. \end{cases}$$

Das três primeiras equações deste sistema obtém-se $x = 1/(1-\lambda)$, $y = -1/(1-\lambda)$ e $z = 1/(1-\lambda)$, e substituindo na última equações conclui-se que $(1-\lambda)^2 = 3$, o que resulta em dois valores possíveis para a variável $\lambda : 1-\lambda = \sqrt{3}$ ou $1-\lambda = -\sqrt{3}$.

Portanto, com $1-\lambda = \sqrt{3}$ tem-se o ponto

$$(x,y,z) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

e com $1-\lambda = -\sqrt{3}$ tem-se

$$(x,y,z) = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Atendendo a que a distância pretendida é $d(x, y, z) = \sqrt{f(x, y, z)}$ e como

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 < 3\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

conclui-se que o primeiro ponto é o ponto da esfera para o qual a distância a $(1, -1, 1)$ é mínima e o segundo ponto é aquele para o qual a distância é máxima. Note-se que este resultado é geometricamente óbvio: o ponto da esfera mais próximo de $(1, -1, 1)$ tem de estar no mesmo octante deste ponto, portanto correspondente a um ponto com coordenadas com sinais $(+, -, +)$, e o ponto mais afastado terá de estar no octante oposto relativamente à origem, portanto com coordenadas com sinais $(-, +, -)$, como, de facto, se verificou acontecer.

VII.a) Sendo Φ uma função polinomial, é de classe C^∞. O Teorema da função implícita é aplicável, para o pedido no enunciado, em pontos nos quais $\partial\Phi/\partial z \neq 0$. Sendo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, z) = xy(4xyz - 1)$$

conclui-se que temos de ter $x_0 \neq 0 \wedge y_0 \neq 0 \wedge x_0 y_0 z_0 \neq \frac{1}{4}$.

VII.b) Claramente, pela alínea anterior, o ponto $(1, 1, 1)$ satisfaz as condições do Teorema da função implícita e podemos garantor que, numa vizinhança de $(1, 1, 1)$, $\Phi(x, y, z) = 0$ define implicitamente $z = \phi(x, y)$ para (x, y) numa vizinhança suficientemente pequena de $(1, 1)$. A equação do plano tangente a $\Phi(x, y, z) = 0$ em $(1, 1, 1)$ será, então, o gráfico da função polinomial que é a melhor aproximação de primeira ordem a ϕ em $(x, y) = (1, 1)$.

Derivando $\Phi(x, y, \phi(x, y)) = 0$ em ordem a x tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, y, \phi(x, y)) = 0 \Leftrightarrow 4xy^2\phi^2 + 4x^2y^2\phi\frac{\partial \phi}{\partial x} - y\phi - xy\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

e portanto, substituindo $x = 1, y = 1$ e $\phi(1, 1) = 1$, concluimos que $\frac{\partial \phi}{\partial x}(1, 1, 1) = -1$.

Por outro lado, como Φ é invariante para a troca $x \leftrightarrow y$, conclui-se que repetindo estes cálculos para a derivada em ordem a y também obteríamos $\frac{\partial \phi}{\partial y}(1, 1, 1) = -1$.

Consequentemente, o polinómio de Taylor de primeira ordem de ϕ em $(1, 1)$ é

$$z = \phi(1, 1) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(1, 1)(y - 1),$$

ou seja,

$$z = 1 - (x - 1) - (y - 1),$$

como pretendíamos concluir.