

Nome: .. Mário Filipe dos Reis Amado

CC/Bi: ...11711641..... N° de Estudante:701891.....

Curso: ...Informática..... Turma: ...1.....

Unidade Curricular: Matemática Finita Código: 21082

Data:13/04/2016..... Ano Lectivo: 2015/16

Docente: Maria João Oliveira Classificação:

O e-Fólio é uma prova TOTALMENTE individual. A suspeita fundamentada de cópia, ou de plágio, é motivo de anulação imediata do mesmo.

PARA A RESOLUÇÃO DO e-Fólio A, ACONSELHA-SE QUE:

- Imprima este documento (não necessariamente a cores) e preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-Fólio é composto por 7 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra FIM. Responda às questões de escolha múltipla no espaço destinado a esse efeito. As suas respostas às restantes questões não devem ultrapassar 6 páginas.
- Escreva sempre com uma letra legível.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um documento único em **formato PDF**, que inclua esta folha de rosto, a folha das escolhas múltiplas e as suas restantes respostas, e insira-o, na página moodle da unidade curricular, em “e-Fólio A” até ao dia 18 de Abril.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO:

- Com excepção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- A cotação total deste e-Fólio é de 4 valores.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 0.3 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado 0.1 valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões é de 0 valores. A distribuição da cotação é a seguinte:

1-3	ERRADAS				
C	0	1	2	3	
E	0	0.0	0.0	0.0	0.0
R	1	0.3	0.2	0.1	
T	2	0.6	0.5		
AS	3	0.9			

4.	5.	6.	7.
0.4 val.	0.8 val.	1.4 val.	0.5 val.

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando \times no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Sabendo que se podem formar 10 listas ordenadas (x_1, x_2, x_3) , $x_1 < x_2 < x_3$, formadas por três números naturais x_1, x_2, x_3 entre 2 e k , conclui-se que

- | | | | |
|-------------------------------------|------------|--------------------------|------------|
| <input type="checkbox"/> | a) $k = 4$ | <input type="checkbox"/> | c) $k = 6$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> | b) $k = 5$ | <input type="checkbox"/> | d) $k = 7$ |

2. Relativamente à igualdade

$$b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k$$

ela **não** é equivalente a:

- | | | | |
|--------------------------|--|-------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | a) $a^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-3k} \binom{n}{k} b^k$ | <input checked="" type="checkbox"/> | c) $a^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{2n-3k} \binom{n}{k} b^{n-k}$ |
| <input type="checkbox"/> | b) $a^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+3k} \binom{n}{k} b^k$ | <input type="checkbox"/> | d) $a^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-3k} \binom{n}{k} b^{n-k}$ |

3. Dados X e Y dois conjuntos finitos e não vazios tais que $\#X \leq \#Y$ e uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, quatro indivíduos, A, B, C e D , afirmaram de imediato:

- A) “ f é bijectiva”
- B) “ f é injectiva, mas não é necessariamente sobrejectiva”
- C) “ f é sobrejectiva, mas não é necessariamente injectiva”
- D) “Os dados do problema não são conclusivos”

Qual destas pessoas tem razão?

- | | | | |
|--------------------------|------|-------------------------------------|------|
| <input type="checkbox"/> | a) A | <input type="checkbox"/> | c) C |
| <input type="checkbox"/> | b) B | <input checked="" type="checkbox"/> | d) D |

4.

Sejam A, B e C dois conjuntos finitos e não vazios e sejam $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ e $g \circ f: A \rightarrow C$, sendo $g \circ f$ é injetiva, ou seja $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ para $x_1 \neq x_2$. Ora como g é uma função definida em B com valores em C , isto é, tem apenas uma imagem para cada objeto, f é injetiva.

Por outro lado, se f não fosse injetiva $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$, já que, por definição, sendo f uma função definida em A com valores em B , f é injetiva se, e somente se, $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1 = x_2$. E, neste caso, sendo g também uma função, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, o que faria com que $g \circ f$ também não fosse injetiva, o que sabemos ser falso pelo enunciado.

5.1

Contando as possibilidades para números do tipo $5xyz$, existem $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$, já que x pode ser um dígito entre 1 e 4 e 6 e 9, e yz qualquer um destes desde que não um repetido noutra posição. (A)

Depois, temos os números do tipo $x5yz$ para os quais existem também $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ possibilidades. (B)

Da mesma forma para dígitos do tipo $xy5z$ e $xyz5$. (C) e (D)

Então:

$$\#(A) = \#(B) = \#(C) = \#(D) = 336$$

Logo, o resultado para quantos números com 4 algarismos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ não têm dígitos repetidos mas contém o algarismo 5 é:

$$336 + 336 + 336 + 336 = 1344$$

5.2

Primeiro há que contar os números do tipo $5xxx$ (onde x pode ser um dígito entre 1 e 9). Existem $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. (A)

Depois, todos os números do tipo $x5xx$ (onde y pode ser 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Existem $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. (B)

Então, os números do tipo $xx5x$ (onde x pode ser 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Existem $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. (C)

Por fim, todos os números do tipo $xxx5$. Existem $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. (D)

Então:

$$\#(A) = 729; \#(B) = 729; \#(C) = 729; \#(D) = 729;$$

$$\#(A \cap B) = 81; // \text{ todos os números } 55xx \text{ (onde } x \text{ pode ser um dígito entre 1 e 9)}.$$

$$\#(A \cap C) = 81; // \text{ todos os números } 5x5x \text{ (onde } x \text{ pode ser um dígito entre 1 e 9)}.$$

$\#(A \cap D)=81$; // todos os números $5x5$ (onde x pode ser um dígito entre 1 e 9).

$\#(B \cap C)=81$; // todos os números $x55x$ (onde x pode ser um dígito entre 1 e 9).

$\#(B \cap D)=81$; // todos os números $x5x5$ (onde x pode ser um dígito entre 1 e 9).

$\#(C \cap D)=81$; // todos os números $xx55$ (onde x pode ser um dígito entre 1 e 9).

$\#(A \cap B \cap C)=9$; // todos os números $555x$ (onde x pode ser um dígito entre 1 e 9).

$\#(A \cap B \cap D)=9$; // todos os números $55x5$ (onde x pode ser um dígito entre 1 e 9).

$\#(A \cap C \cap D)=9$; // todos os números $5x55$ (onde x pode ser um dígito entre 1 e 9).

$\#(B \cap C \cap D)=9$; // todos os números $x555$ (onde x pode ser um dígito entre 1 e 9).

$\#(A \cap B \cap C \cap D)=1$; // apenas 5555

Então, pelo princípio da inclusão/exclusão:

$$\#(A \cup B \cup C \cup D) = \#(A) + \#(B) + \#(C) + \#(D) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(A \cap D) - \#(B \cap C) - \#(B \cap D) - \#(C \cap D) + \#(A \cap B \cap C) + \#(A \cap B \cap D) + \#(A \cap C \cap D) + \#(B \cap C \cap D) - \#(A \cap B \cap C \cap D)$$

Logo, temos que o resultado para quantos números com 4 algarismos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ contém o algarismo 5 é:

$$729 + 729 + 729 + 729 - 81 - 81 - 81 - 81 - 81 - 81 + 9 + 9 + 9 + 9 - 1 = 2465$$

6.1

A Base de Indução consiste em que:

$$\forall x, y \in R, C (x + y)^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^k y^{0-k} \leq 1 = \binom{0}{0} x^0 y^{0-0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 = 1$$

(Base de Indução)

O que representa uma proposição verdadeira. Admitindo que:

$$\forall x, y \in R, C (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

(Hipótese de Indução)

Com vista a provar que:

$$\forall x, y \in R, C \quad (x + y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

(Tese de Indução)

Se $(x + y)^{n+1} = (x + y)^n (x + y)^1$, então, por Hipótese de Indução:

$$(x + y)^{n+1} = (x + y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k+1}$$

No entanto, pela Lei de Pascal:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} x^0 y^{n-0} + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k} \right) \\ &\quad + \binom{n}{n} x^{n+1} y^{n+1-n} \\ &= \binom{n+1}{0} x^0 y^n + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k} \right) + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^1 \end{aligned}$$

E porque:

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n} = 1$$

Então, como:

$$\binom{n+1}{0} x^0 y^0 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k} \right) + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

Prova-se a Tese de que:

$$(x + y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$