UNIVERSIDADE ABERTA
www.univ-ab.pt

e-Fólio A

cartão de aprendizagem

Nome: ....

CC/BI: .... **Nº de Estudante:** ....

Curso: **Turma:** ....

Unidade Curricular: Matemática Finita **Código:** 21082

Data: .... **Ano Lectivo:** 2015/16

Docente: Maria João Oliveira **Classificação:** ....

O e-Fólio é uma prova TOTALMENTE individual. A suspeita fundamentada de cópia, ou de plágio, é motivo de anulação imediata do mesmo.

Para a resolução do **e-Fólio A**, aconselha-se que:

- Imprima este documento (não necessariamente a cores) e preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-Fólio é composto por 7 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra FIM. Responda às questões de escolha múltipla no espaço destinado a esse efeito. As suas respostas às restantes questões não devem ultrapassar 6 páginas.
- Escreva sempre com uma letra legível.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um documento único em **formato PDF**, que inclua esta folha de rosto, a folha das escolhas múltiplas e as suas restantes respostas, e insira-o, na página moodle da unidade curricular, em “e-Fólio A” até ao dia 18 de Abril.

Critérios de avaliação e cotação:

- Com excepção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- A cotação total deste e-Fólio é de **4** valores.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 0.3 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado 0.1 valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões é de 0 valores. A distribuição da cotação é a seguinte:

1–3	ERRADAS				
C		0	1	2	3
E	0	0.0	0.0	0.0	0.0
R	1	0.3	0.2	0.1	
T	2	0.6	0.5		
AS	3	**0.9**			

4.	**5.**	**6.**	**7.**
0.4 val.	**0.8** val.	**1.4** val.	**0.5** val.

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Sabendo que se podem formar 10 listas ordenadas (x_1, x_2, x_3), $x_1 < x_2 < x_3$, formadas por três números naturais x_1, x_2, x_3 entre 2 e k, conclui-se que

- ☐ **a)** $k = 4$
- ☒ **b)** $k = 5$
- ☐ **c)** $k = 6$
- ☐ **d)** $k = 7$

2. Relativamente à igualdade

$$b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k$$

ela **não** é equivalente a:

- ☐ **a)** $a^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-3k} \binom{n}{k} b^k$
- ☐ **b)** $a^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+3k} \binom{n}{k} b^k$
- ☒ **c)** $a^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2n-3k} \binom{n}{k} b^{n-k}$
- ☐ **d)** $a^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-3k} \binom{n}{k} b^{n-k}$

3. Dados X e Y dois conjuntos finitos e não vazios tais que $\#X \leq \#Y$ e uma aplicação $f : X \to Y$, quatro indivíduos, A, B, C e D, afirmaram de imediato:

A) “f é bijectiva”

B) “f é injectiva, mas não é necessariamente sobrejectiva”

C) “f é sobrejectiva, mas não é necessariamente injectiva”

D) “Os dados do problema não são conclusivos”

Qual destas pessoas tem razão?

- ☐ **a)** A
- ☐ **b)** B
- ☐ **c)** C
- ☒ **d)** D

4.

Sejam A, B e C dois conjuntos finitos e não vazios e sejam $f: A \to B$, $g: B \to C$ e $gof: A \to C$, sendo gof é injetiva, ou seja $g\big(f(x_1)\big) \neq g\big(f(x_2)\big)\ para\ x_1 \neq x_2$. Ora como g é uma função definida em A com valores em C, isto é, tem apenas uma imagem para cada objeto, f é injetiva.

Por outro lado, se f não fosse injetiva $f(x_1) = f(x_2)\ para\ x_1 \neq x_2$, já que, por definição, sendo f uma funções definida em A com valores em B, f é injetiva se, e somente se, $f(x_1) = f(x_2)\ para\ x_1 = x_2$. E, neste caso, sendo g também uma função, $g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$, o que faria com que gof também não fosse injetiva, o que sabemos ser falso pelo enunciado.

5.1

Contando as possibilidades para números do tipo 5xyz, existem 8*7*6=336, já que x pode ser um dígito entre 1 e 4 e 6 e 9, e yz qualquer um destes desde que não um repetido noutra posição.(A)

Depois, temos os números do tipo x5yz para os quais existem também 8*7*6=336 possibilidades.(B)

Da mesma forma para dígitos do tipo xy5z e xyz5. (C) e (D)

Então:

#(A)=#(B)=#(C)=#(D)=336

Logo, o resultado para quantos números com 4 algarismos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} não têm dígitos repetidos mas contém o algarismo 5 é:

336 + 336 + 336 + 336 = 1344

5.2

Primeiro há que contar os números do tipo 5xxx (onde x pode ser um digito entre 1 e 9). Existem 9*9*9=729. (A)

Depois, todos os números do tipo x5xx (onde y pode ser 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Existem 9*9*9=729. (B)

Então, os números do tipo xx5x (onde x pode ser 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Existem 9*9*9=729. (C)

Por fim, todos os números do tipo xxx5. Existem 9*9*9=729. (D)

Então:

#(A)=729; #(B)=729; #(C)=729; #(D)=729;

#(A ∩ B)=81; //todos os números 55xx (onde x pode ser um digito entre 1 e 9).

#(A ∩ C)=81; // todos os números 5x5x (onde x pode ser um digito entre 1 e 9).

#(A ∩ D)=81; // todos os números 5xx5 (onde x pode ser um digito entre 1 e 9).

#(B ∩ C)=81; // todos os números x55x (onde x pode ser um digito entre 1 e 9).

#(B ∩ D)=81; // todos os números x5x5 (onde x pode ser um digito entre 1 e 9).

#(C ∩ D)=81; // todos os números xx55 (onde x pode ser um digito entre 1 e 9).

#(A ∩ B ∩ C)=9; // todos os números 555x (onde x pode ser um digito entre 1 e 9).

#(A ∩ B ∩ D)=9; // todos os números 55x5 (onde x pode ser um digito entre 1 e 9).

#(A ∩ C ∩ D)=9; // todos os números 5x55 (onde x pode ser um digito entre 1 e 9).

#(B ∩ C ∩ D)=9; // todos os números x555 (onde x pode ser um digito entre 1 e 9).

#(A ∩ B ∩ C ∩ D)=1; // apenas 5555

Então, pelo princípio da inclusão/exclusão:

#(A U B U C U D) = #(A) + #(B) + #(C) + # (D) - #(A ∩ B) - #(A ∩ C) - #(A ∩ D) - #(B ∩ C) - #(B ∩ D) - #(C ∩ D) + #(A ∩ B ∩ C) + #(A ∩ B ∩ D) + #(A ∩ C ∩ D) + #(B ∩ C ∩ D) - #(A ∩ B ∩ C ∩ D)

Logo, temos que o resultado para quantos números com 4 algarismos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} contém o algarismo 5 é:

729 + 729 + 729 + 729 - 81 - 81 - 81 - 81 - 81 - 81 + 9 + 9 + 9 + 9 - 1 = 2465

6.1

A Base de Indução consiste em que:

$$\forall\ x, y\ \in R, C\ (x+y)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} \leq> 1 = \binom{0}{0} x^0 y^{0-0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1$$

(Base de Indução)

O que representa uma proposição verdadeira. Admitindo que:

$$\forall\ x, y\ \in R, C\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

(Hipótese de Indução)

Com vista a provar que:

$$\forall\, x, y \;\in R, C\; (x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

(<u>Tese de Indução</u>)

Sendo $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y)^1$, então, por <u>Hipótese de Indução</u>:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k+1}$$

No entanto, pela <u>Lei de Pascal</u>:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k}$$

$$= \binom{n}{0} x^0 y^{n-0} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k} \right)$$

$$+ \binom{n}{n} x^{n+1} y^{n+1-n}$$

$$= \binom{n+1}{0} x^0 y^n + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k} \right) + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^1$$

E porque:

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n} = 1$$

Então, como:

$$\binom{n+1}{0} x^0 y^0 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k} \right) + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

Prova-se a <u>Tese</u> de que:

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$